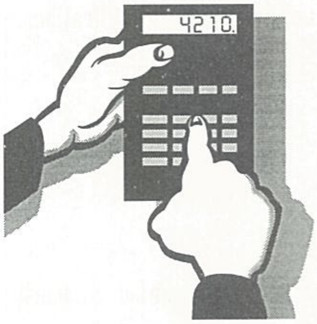

หลักคณิตศาสตร์ กับการประกันชีวิต

*เฉลิมสิน สิงห์สนอง

ทุกคนที่เกิดมาแล้วจะต้องตาย ไม่มีใครที่จะสามารถทำนายได้อย่างถูกต้องว่าจะตายเมื่อใด ความไม่แน่นอนของชีวิตมนุษย์ทำให้เกิดความจำเป็น ในการค้นหาความพร้อมเพื่อเตรียมการสำหรับครอบครัวเมื่อการตายมาถึง การคาดการณ์จำนวนคนตายได้อย่างถูกต้อง จะช่วยให้บริษัทประกันชีวิตสามารถให้ความคุ้มครองแก่บุคคลต่าง ๆ ได้ตรงตามประสงค์ของบุคคลนั้น โดยเงื่อนไขสุขภาพเป็นเกณฑ์

การคิดตามหลักคณิตศาสตร์จะช่วยให้บริษัทประกันชีวิตพยากรณ์จำนวนคนตายจากกลุ่มคนที่ทำประกันชีวิตกับบริษัทได้ถูกต้องแม่นยำ ซึ่งหลักสำคัญในวิชาคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้ในการประกันชีวิต คือ ความน่าจะเป็น หรือโอกาสของการตายของคนแต่ละคน ในช่วงเวลาที่กำหนดที่เรียกว่า อัตรามรณะ

ความน่าจะเป็น (Probability)

ผู้เขียนจะยกตัวอย่างการคำนวณความน่าจะเป็นหรือโอกาสของการตายของคนแต่ละคนในช่วงเวลาที่กำหนด ถ้า

** หัวหน้ากลุ่มวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาศึกษาทั่วไป คณะมนุษยศาสตร์ มหาวิทยาลัยธุรกิจบัณฑิตย์ : ว.ทม. (สถิติ) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย*

ให้เหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่งสามารถเกิดขึ้นได้ A หนทางและไม่เกิดขึ้น B หนทาง โดยที่หนทางทั้งหมดเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน (Equally Likely) ความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ที่สนใจ หรือ p จะมีค่าดังนี้

$$p = \frac{A}{A+B} \qquad \text{------------------------ (1)}$$

และความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ที่ไม่สนใจ หรือ q จะมีค่าเท่ากับ

$$q = \frac{B}{A+B} \qquad \text{------------------------ (2)}$$

การให้คำจำกัดความทางคณิตศาสตร์ที่ตรงกับความหมายของคำว่า ความน่าจะเป็นหรือโอกาสนั้นหมายถึงความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ที่เราสนใจ หรือ การเกิดเหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่งที่สนใจ เช่น ในบริษัทประกันชีวิตแห่งหนึ่งมีผู้มาทำประกันชีวิตกับบริษัท 10,000 คน โดยเป็นเพศชาย 7,000 คน เพศหญิง 3,000 คน ในกรณีนี้ความน่าจะเป็นที่จะเลือกคนมา 1 คน แบบสุ่มแล้วได้เป็นเพศชายจะเท่ากับ $\frac{7{,}000}{7{,}000+3{,}000} = \frac{7{,}000}{10{,}000} = \frac{7}{10}$ จะเห็นได้ว่าจำนวนหนทางที่อาจจะเป็นไปได้เท่า ๆ กัน คือ A ในการเลือกเพศชายมีจำนวนเท่ากับ 7,000 หนทาง ขณะที่หนทางที่จะเลือกได้เพศหญิงซึ่งเป็นไปได้เท่า ๆ กัน คือ B ในการเลือกเพศหญิงจะมี 3,000 หนทาง ดังนั้นความน่าจะเป็นในการเลือกแบบสุ่มที่จะได้เพศหญิงจะเท่ากับ $\frac{3{,}000}{7{,}000+3{,}000} = \frac{3{,}000}{10{,}000} = \frac{3}{10}$

จะเห็นได้ว่า (1) + (2)

$$p+q = \frac{A}{A+B} + \frac{B}{A+B}$$

$$p+q = \frac{A+B}{A+B}$$

$$p+q = 1$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ที่สนใจรวมกับความน่าจะเป็นของการไม่เกิดเหตุการณ์ที่สนใจเท่ากับ 1 และถ้าเมื่อใดก็ตามที่ q = 0 และ p = 1 หมายความว่าเหตุการณ์นั้นจะเกิดขึ้นอย่างแน่นอน

จากสถานการณ์ในชีวิตประจำวัน มีเหตุการณ์จำนวนมากที่เราไม่สามารถทำการนับจำนวนหนทางที่จะเกิดหรือไม่เกิดเหตุการณ์ที่สนใจ และไม่สามารถบอกว่าหนทางนั้น ๆ เกิดขึ้นได้เท่า ๆ กันหรือไม่ ด้วยเหตุนี้ ในเรื่องของการประกันชีวิตและในเรื่องอื่น ๆ พบว่าความหมายของความน่าจะเป็นที่กล่าวไว้แล้ว ใช้ไม่ได้ในการพิจารณาความน่าจะเป็นพื้นฐานที่ต้องการ แต่เราจะต้องทำการประมาณค่าความน่าจะเป็นโดยการสังเกต การบันทึกสถิติของการเกิดเหตุการณ์นั้น ๆ ไว้เป็นเวลานาน ๆ ดังนั้น ถ้าจากการสังเกตพบว่าเหตุการณ์หนึ่งได้เกิดขึ้น M ครั้ง จากเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นได้

ทั้งหมด N เหตุการณ์ โดยที่ N เป็นเลขที่มีค่าใหญ่และไม่สามารถหาข้อมูลอื่น ๆ มาประกอบได้อีกแล้ว เราอาจจะให้ $\frac{M}{N}$ เป็นค่าประมาณของความน่าจะเป็น เป็นของการเกิดเหตุการณ์นั้น ตัวอย่างเช่น ถ้าเราพิจารณาพบว่าจากจำนวนคน 10,000 คน ที่มีอายุ 40 ปี พอดี มีคนตายในปีถัดมาจำนวน 180 คน เราก็สามารถประมาณได้ว่า ความน่าจะเป็นของคนที่มีอายุ 40 ปี จะตายในปีถัดมามีค่าเท่ากับ $\frac{180}{10,000} = 0.018$

เพื่อความถูกต้องแม่นยำของความน่าจะเป็นโดยอาศัยหลักเกณฑ์ของการสังเกตนี้จะต้องกำหนดให้อยู่ในรูปของลิมิตของอัตราส่วน $\frac{M}{N}$ ให้ค่าของ N เพิ่มขึ้นโดยไม่จำกัด จะอยู่ในรูปสมการคณิตศาสตร์ ดังนี้

$$P = \lim_{n \to \infty} \frac{M}{N} \qquad \text{------------------------} \quad (3)$$

ในทางทฤษฎี จะไม่สามารถหาค่าสมการ (3) ได้ แต่เราก็สามารถหาค่าประมาณของลิมิตได้ ซึ่งสามารถนำผลมาใช้ประโยชน์ได้ในทางปฏิบัติ

ตารางมรณะ (Mortality Table)

เป็นตารางแสดงความน่าจะเป็นของการมีชีวิตอยู่หรือการตาย ตารางมรณะจะจัดทำขึ้นมาจากการจดบันทึกจำนวนคนตาย ณ อายุต่าง ๆ จากในอดีต เพื่อมาใช้ประโยชน์ในการพยากรณ์ค่าที่จะเกิดขึ้นในอนาคต โดยมีแนวคิดว่าเหตุการณ์ที่จะเกิดขึ้นในอนาคตจะมีรูปแบบของการเกิดใกล้เคียงหรือซ้ำกับในอดีต การสร้างตารางมรณะก็คือ การหาความน่าจะเป็นที่คน ๆ หนึ่งที่ ณ อายุต่าง ๆ กัน จะตายภายใน 1 ปีนั่นเอง ตารางมรณะที่สำคัญหลายตารางถูกสร้างขึ้นจากสถิติคนตาย ณ จุดอายุต่าง ๆ ที่ได้แจ้งอย่างเป็นทางการกับหน่วยราชการที่เกี่ยวข้อง และอัตรามรณะก็จะคำนวณได้จากการหารจำนวนคนตายด้วยเลขดัชนีที่ปรับแล้ว เพื่อแทนตัวเลขของความเสี่ยงต่อการตาย ณ อายุนั้น

หลักการที่ใช้ในการสร้างตารางมรณะของบริษัทประกันชีวิตทั้งหลายจะอยู่ในรูปแบบที่คล้ายคลึงกัน คือ จะมีการนับจำนวนคนตาย ณ อายุต่าง ๆ กัน เพื่อเปรียบเทียบกับจำนวนคนที่มีความเสี่ยงต่อการตายที่อายุเดียวกัน ผลหารของตัวเลขทั้งสอง คือ อัตรามรณะ อัตรามรณะที่คำนวณได้จากอายุหนึ่งไปยังอีกอายุหนึ่งจะไม่ต่อเนื่องกัน ดังนั้นนักคณิตศาสตร์จึงใช้วิธีการที่เรียกว่า “Graduation” มาช่วยปรับความผิดปกติดังกล่าวให้หายไป ตารางมรณะที่ใช้คำนวณเบี้ยประกันชีวิตในประเทศไทยจึงเป็นตารางที่ได้มีการปรับปรุงแล้ว ได้แก่ตารางมรณะ CSO 1941 (Commissioner’s 1941 Standard Ordinary Mortality Table) และตารางมรณะ CSO 1958 (Commissioner’s 1958 Standard Ordinary Mortality Table)

ตารางมรณะที่คำนวณเสร็จเรียบร้อยแล้วย่อมประกอบไปด้วยคนที่มีชีวิตอยู่กับจำนวนคนที่ตายที่อายุต่าง ๆ กัน

โดยให้ x เป็นตัวห้อย (subscript) แทนอายุที่ปรากฏในตาราง Lx จะหมายถึงจำนวนผู้ที่มีชีวิตอยู่ ณ จุดอายุ x จากจำนวนคนเริ่มแรกทั้งหมดที่ปรากฏอยู่ตอนต้นของตาราง และ Dx จะหมายถึงจำนวนคนที่ตายภายหลังจากมีอายุครบ x ปี ก่อนมีอายุ x + 1 ปี ดังนั้น จำนวนคนที่มีชีวิตอยู่ x + 1 ปี จะเท่ากับจำนวนคนที่มีอายุ x ปี หักออกด้วยจำนวนคนที่ตายระหว่างอายุ x ปี ถึง x + 1 ปี

$$L_{x+1} = L_x - D_x \qquad \text{------------------------ (4)}$$

ตัวอย่างเช่น ถ้าต้องการหาความน่าจะเป็นที่คนอายุ 40 ปี จะมีชีวิตอยู่รอดถึงอายุ 41 ปี โดยใช้ตารางมรณะ CSO 1958 จากตารางมรณะ CSO 1958 พบว่า จากจำนวน 9,241,359 คน ผู้ชายที่มีอายุ 40 ปี จะมีคนที่มีชีวิตรอดเหลือจนมีอายุ 41 ปี มีจำนวน 9,208,737 คน ดังนั้น โอกาสของการมีชีวิตอยู่รอดถึงอายุ 41 ปี จะเท่ากับ $\frac{9,208,737}{9,241,359} = 0.996$ ซึ่งเป็นความน่าจะเป็นที่กำหนดไว้ล่วงหน้า

โดยทั่วไป นักคณิตศาสตร์ประกันชีวิตจะใช้สัญลักษณ์ x แทนคนที่มีอายุ x ปี พอดี และกำหนดให้ความน่าจะเป็นของคนที่มีอายุ x ปี จะมีอายุอยู่รอดจนถึง x + 1 ปี มีค่าเป็น

$$p_x = \frac{L_{x+1}}{L_x} \qquad \text{------------------------ (5)}$$

ความน่าจะเป็นของคนอายุ x ปี จะตายก่อนที่จะมีอายุครบ x + 1 ปี จะมีค่าเท่ากับ

$$q_x = \frac{D_x}{L_x} \qquad \text{------------------------ (6)}$$

และเนื่องจาก $L_{x+1} + D_x = L_x$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} p_x + q_x &= \frac{L_{x+1}}{L_x} + \frac{D_x}{L_x} \\ &= \frac{L_{x+1} + D_x}{Lx} \\ &= \frac{L_x}{Lx} \\ &= 1 \end{aligned}$$

ซึ่งมีความสอดคล้องกับความหมายของความน่าจะเป็นตามที่กล่าวมาแล้ว

ต่อไปนี้จะขอเสนอตัวอย่างการคำนวณหาอัตรามรณะที่ใช้ค่าจากตารางมรณะ ตัวอย่างเช่น ความน่าจะเป็นที่ชายคนหนึ่งอายุ 40 ปี จะตายภายในช่วงเวลาระหว่างอายุ 40 - 49 ปี จากตารางมรณะ CSO 1958 พบว่า

จำนวนคนตายเมื่ออายุ	40	D_{40}	= 32,622
	41	D_{41}	= 35,362
	42	D_{42}	= 38,253
	43	D_{43}	= 41,382
	44	D_{44}	= 44,741
	45	D_{45}	= 48,412
	46	D_{46}	= 52,473
	47	D_{47}	= 56,910
	48	D_{48}	= 61,794
	49	D_{49}	= 67,104
จำนวนคนที่มีชีวิตเมื่ออายุ 40 ปี		L_{40}	= 9,241,359

ดังนั้นความน่าจะเป็นที่จะมีคนตายในช่วงระหว่างอายุ 40 - 49 ปี คือ

$$q_{40\text{-}49} = \frac{32{,}622}{9{,}241{,}359} + \frac{35{,}362}{9{,}241{,}359} + \frac{67{,}104}{9{,}241{,}359}$$

$$= \frac{32{,}622+35{,}362+\ldots+67{,}104}{9{,}241{,}359}$$

$$= 0.05184$$

นั่นคือ อัตรามรณะ $= 0.05184$

ดังนั้น จากหลักคณิตศาสตร์ในเรื่องของความน่าจะเป็น ประกอบกับสถิติจากข้อมูลการตาย จึงสามารถพยากรณ์อัตราการตายของคน ณ ระดับอายุต่าง ๆ ได้ และบริษัทประกันภัยได้นำมาเป็นประโยชน์กับอาชีพการประกันชีวิตนั่นเอง

ตาราง **II-1958** CSO Mortality Table-Males

x	lx	dx	qx	ex	x
0	10 000 000	70 800	0.007 08	68.30	0
1	9 929 200	17 475	0.001 76	67.78	1
2	9 911 725	15 066	0.001 52	66.90	2
3	9 896 659	14 449	0.001 46	66.00	3
4	9 882 510	13 835	0.001 40	65.10	4
5	9 868 375	13 322	0.001 35	64.19	5
6	9 855 053	12 812	0.001 30	63.27	6
7	9 842 241	12 401	0.001 26	62.35	7
8	9 829 840	12 091	0.001 23	61.43	8
9	9 817 749	11 879	0.001 21	60.51	9
10	9 805 870	11 865	0.001 21	59.58	10
11	9 794 005	12 047	0.001 23	58.65	11
12	9 781 958	12 325	0.001 26	57.72	12
13	9 769 633	12 896	0.001 32	56.80	13
14	9 756 737	13 562	0.001 39	55.87	14
15	9 743 175	14 225	0.001 46	54.95	15
16	9 728 950	14 983	0.001 54	54.03	16
17	9 713 967	15 737	0.001 62	53.11	17
18	9 698 230	16 390	0.001 69	52.19	18
19	9 681 840	16 846	0.001 74	51.28	19
20	9 664 994	17 300	0.001 79	50.37	20
21	9 647 694	17 655	0.001 83	49.46	21
22	9 630 039	17 912	0.001 86	48.45	22
23	9 612 127	18 167	0.001 89	47.64	23
24	9 893 960	18 324	0.001 91	46.73	24
25	9 575 636	18 481	0.001 93	45.82	25
26	9 557 155	18 732	0.001 96	44.90	26
27	9 538 423	18 981	0.001 99	43.99	27

ตาราง II-1958 CSO Mortality Table-Males

28	9 519 442	19 324	0.002 3	43.08	28
29	9 500 118	19 760	0.002 8	42.16	29
30	9 480 358	20 193	0.002 13	41.25	30
31	9 460 165	20 718	0.002 19	40.34	31
32	9 439 447	21 239	0.002 25	39.43	32
33	9 418 208	21 850	0.002 32	38.51	33
34	9 396 358	22 551	0.002 40	37.60	34
35	9 373 807	23 528	0.002 51	36.69	35
36	9 350 279	24 682	0.002 64	35.78	36
37	9 325 594	26 112	0.002 80	34.88	37
38	9 299 482	27 991	0.003 01	33.79	38
39	9 271 491	30 132	0.003 25	33.07	39
40	9 241 359	32 622	0.003 53	32.18	40
41	9 208 737	35 362	0.003 84	31.29	41
42	9 173 375	38 253	0.004 17	30.41	42
43	9 135 122	41 382	0.004 53	29.54	43
44	9 093 740	44 741	0.004 92	28.67	44
45	9 048 999	45 412	0.005 35	27.81	45
46	9 000 587	52 473	0.005 83	26.95	46
47	9 948 114	56 910	0.006 36	26.11	47
48	9 891 204	61 794	0.006 95	25.27	48
49	9 829 410	67 104	0.007 60	24.45	49
50	8 762 306	72 902	0.008 32	23.63	50
51	8 689 404	79 160	0.009 11	22.82	51
52	8 610 244	85 758	0.009 96	22.03	52
53	8 524 486	92 832	0.010 89	21.25	53
54	8 431 654	100 337	0.001 90	20.47	54
55	8 331 317	108 307	0.013 00	19.71	55
56	8 223 010	116 849	0.014 21	18.97	56

ตาราง II-1958 CSO Mortality Table-Males

57	8 106 161	125 970	0.015 54	18.23	57
58	7 980 191	135 663	0.017 00	17.51	58
59	7 844 528	145 830	0.018 59	16.81	59
60	7 698 698	156 592	0.020 34	16.12	60
61	7 542 106	167 736	0.022 24	15.44	61
62	7 374 370	179 271	0.024 31	14.78	62
63	7 195 099	191 174	0.026 57	14.14	63
64	7 003 925	203 394	0.029 04	13.51	64
65	6 800 531	215 917	0.031 75	12.90	65
66	6 584 614	228 749	0.034 74	12.31	66
67	6 355 865	241 777	0.038 04	11.73	67
68	6 114 88	254 835	0.041 68	11.17	68
69	5 859 253	267 241	0.045 61	10.64	69
70	5 592 012	278 426	0.049 79	10.12	70
71	5 313 586	287 731	0.054 15	9.63	71
72	5 025 855	294 766	0.058 65	9.15	72
73	4 731 089	299 289	0.063 26	8.69	73
74	4 431 800	301 894	0.068 12	8.24	74
75	4 129 906	303 011	0.073 37	7.81	75
76	3 826 895	303 014	0.079 18	7.39	76
77	3 523 881	301 997	0.085 70	6.98	77
78	3 221 884	299 829	0.093 06	6.59	78
79	2 922 055	295 683	0.101 19	6.21	79
80	2 626 372	288 848	0.109 98	5.85	80
81	2 337 524	278 983	0.119 35	5.51	81
82	2 58 541	265 902	0.129 17	5.19	82
83	1 792 639	249 858	0.139 38	4.89	83
84	1 542 781	231 433	0.150 01	4.60	84
85	1 311 348	211 311	0.161 14	4.32	85

86	1 100 037	190 108	0.172 82	4.06	86
87	909 929	168 455	0.185 13	3.80	87
88	741 474	146 997	0.198 25	3.55	88
89	594 477	126 303	0.212 46	3.31	89
90	468 174	106 809	0.228 14	3.06	90
91	361 365	88 813	0.245 77	2.82	91
92	272 552	72 480	0.265 93	2.58	92
93	200 072	57 881	0.289 30	2.33	93
94	142 191	45 026	0.316 66	2.07	94
95	97 165	34 128	0.351 24	1.80	95
96	63 037	25 250	0.400 56	1.51	96
97	37 787	18 456	0.488 42	1.18	97
98	19 331	12 916	0.668 15	0.83	98
99	6 415	6 415	1.000 00	0.50	99

บรรณานุกรม

จลีพร โกลากุล คณิตศาสตร์ประกันชีวิต กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2529

ธีระพร วีระถาวร ความน่าจะเป็นกับการประยุกต์ กรุงเทพฯ : อักษรกราฟฟิค, 2537

ธีระพร วีระถาวร และคณะ การเสี่ยงกับสลากกินแบ่งรัฐบาล กรุงเทพฯ : สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์, 2531

วีนัส พีชวณิชย์ ทฤษฎีความน่าจะเป็นและการประยุกต์ กรุงเทพฯ : ประกายพรึก, 2528

O., Menge W. and Fischers C. H., **The Mathematics of life Insurance.** Ulrich's Book Inc , 1985.