การจำลองแบบมอนติคาร์โลสำหรับประมาณค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ของข้อมูลที่มีการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน

The Monte Carlo Simulation for Estimating the Coefficients of Skewness when Observations are Inverse Gaussian Distributed

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วราฤทธิ์ พานิชกิจโกศลกุล*
Assistant Professof Wararit Panichkitkosolkul

* ผู้ช่วยศาสตราจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
* Assistant Professor of Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology, Thammasat University

บทคัดย่อ

การศึกษาครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเสนอวิธีการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ของข้อมูลที่มีการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน และเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ 3 วิธี คือ 1) วิธีอย่างง่าย 2) วิธีปรับค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ด้วยเทอมค่าคงที่ $(n-1)/n$ และ 3) วิธีปรับค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ด้วยเทอมค่าคงที่ $(n-2)/n$ โดยการเปรียบเทียบค่าความเอนเอียงสัมบูรณ์ (lBiasl) และค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Square Error: *MSE*) ของค่าประมาณ กำหนดขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 10, 20, 30, 50 และ 100 กำหนดค่าพารามิเตอร์ μ เท่ากับ 1 และพารามิเตอร์ λ เท่ากับ 1, 3, 5, 10, 15 และ 20 การวิจัยครั้งนี้ใช้วิธีการจำลองแบบมอนติคาร์โล และทำการทดลองซ้ำๆ กัน 10,000 ครั้งในแต่ละสถานการณ์ ผลการวิจัยสรุปได้ดังนี้

วิธีปรับค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ด้วยเทอมค่าคงที่ $(n-2)/n$ ให้ค่าความเอนเอียงสัมบูรณ์ (lBiasl) และค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (*MSE*) ต่ำที่สุด ทุกกรณีที่ศึกษา รองลงมาคือ วิธีปรับค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ด้วยเทอมค่าคงที่ $(n-1)/n$ และวิธีอย่างง่าย ตามลำดับ

คำสำคัญ : การจำลองแบบมอนติคาร์โล ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้
การแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน

Abstract

The objectives of this study are to propose the estimation method for coefficients of skewness of Inverse Gaussian data and to compare three estimation method for coefficients of skewness. Those methods are simple method, adjusted coefficients of skewness method with term $(n-1)/n$, and adjusted coefficients of skewness method with term $(n-2)/n$. The research was considered by the absolute bias ($|Bias|$) and the mean square errors (MSE). The comparisons were done by using sample sizes (n) equal to 10, 20, 30, 50 and 100 whereas parameter μ is 1 and parameters λ are 1, 3, 5, 10, 15, and 20. This research used the Monte Carlo simulation method. The experiment was repeated 10,000 times for each condition. Results of the research are as follows:

For all sample sizes and all parameter values, the $|Bias|$ and the MSE of adjusted coefficients of skewness method with term $(n-2)/n$ are the lowest. We can arrange the methods as follows: the adjusted coefficients of skewness method with term $(n-1)/n$ and simple method, respectively.

Keywords : Monte Carlo Simulation, Coefficients of Skewness, Inverse Gaussian Distribution

1. บทนำ

การแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน (Inverse Gaussian Distribution) เสนอขึ้นครั้งแรกโดย Schrodinger (1) ซึ่งเป็นการแจกแจงหนึ่งที่นำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาต่างๆ เช่น การวิเคราะห์ราคาหุ้น ปัญหาด้านชีววิทยา อุทกภูมิศาสตร์ อุตุนิยมวิทยา และความเชื่อถือได้ของผลิตภัณฑ์ เป็นต้น (2) โดยมีนักวิจัยหลายท่านที่สนใจศึกษาเกี่ยวกับการแจกแจงดังกล่าว อาทิ Tweedie (3), Shuster (4), Chhikara and Folks (5), Seshadri (6,7), Balakrisnan and Chen (8) เป็นต้น ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (Probability Density Function: pdf) ของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน เขียนได้ดังนี้ (9)

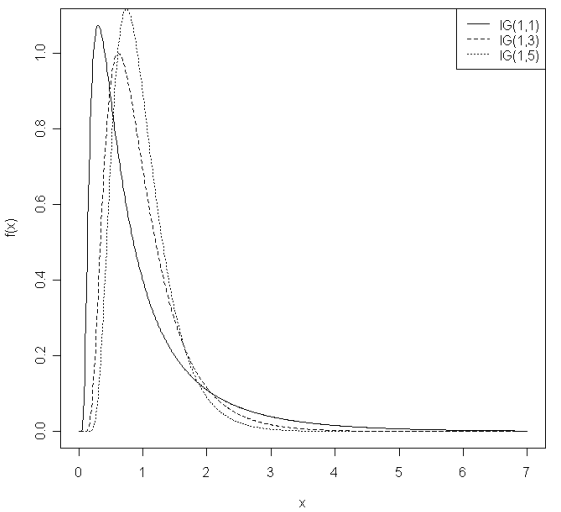
$$f(x/\mu,\lambda)=\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}}\exp\left(\frac{-\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right),\ x>0\ ,\ \mu,\lambda>0$$

กราฟของฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นแสดงดังรูปที่ 1 สำหรับสมบัติที่สำคัญของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน (10) มีดังนี้

ค่าเฉลี่ย μ

ความแปรปรวน μ^3/λ

สัมประสิทธิ์ความเบ้ (γ) $3\sqrt{\mu/\lambda}$



รูปที่ 1 ฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน เมื่อ μ = 1 และ λ = 1, 3 และ 5

วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ μ และ λ สามารถประมาณค่าได้หลายวิธี เช่น วิธีความควรจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Method: ML) และวิธีการประมาณแบบไม่เอนเอียงซึ่งมีความแปรปรวนต่ำสุด (Minimum Variance Unbiased Estimation Method: MVUE) เป็นต้น (11) เมื่อได้ค่าประมาณพารามิเตอร์ $\hat{\mu}$ และ $\hat{\lambda}$ แล้ว ขั้นตอนต่อไปจะนำค่าประมาณพารามิเตอร์ไปคำนวณค่าสถิติต่างๆ เช่น ค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน หรือค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ เป็นต้น วิธีดังกล่าวเรียกว่า วิธีอย่างง่าย (Simple Method)

อย่างไรก็ดี วิธีอย่างง่ายให้ค่าประมาณพารามิเตอร์มากเกินกว่าค่าพารามิเตอร์ที่แท้จริง (True Parameters) ดังนั้นผู้วิจัยจึงมีแนวคิดที่จะนำเทอมค่าคงที่ที่มีค่าน้อยกว่า 1 มาปรับให้ค่าประมาณของสัมประสิทธิ์ความเบ้มีความคลาดเคลื่อนน้อยลง โดยทดลองกับเทอมค่าคงที่ในรูปแบบต่างๆ โดยจากการค้นคว้ายังไม่พบว่ามีนักวิจัยคนใดทำการศึกษาในลักษณะดังกล่าว

ดังนั้นในการศึกษาครั้งนี้จึงเสนอวิธีการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ของข้อมูลที่มีการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน และเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ 3 วิธี คือ 1) วิธีอย่างง่าย 2) วิธีปรับค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ด้วยเทอมค่าคงที่ $(n-1)/n$ และ 3) วิธีปรับค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ด้วยเทอมค่าคงที่ $(n-2)/n$ โดยการเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) ของค่าประมาณ สำหรับขอบขอบเขตของการศึกษามีดังต่อไปนี้

1. กำหนดขนาดตัวอย่างที่ใช้ (n) เท่ากับ 10, 20, 30, 50 และ 100

2. กำหนดค่าพารามิเตอร์ μ เท่ากับ 1[1]

3. กำหนดค่าพารามิเตอร์ λ เท่ากับ 1, 3, 5, 10, 15 และ 20

4. ประมาณค่าพารามิเตอร์ μ และ λ ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด

การศึกษาครั้งนี้ใช้วิธีการจำลองแบบมอนติคาร์โลด้วยเครื่องไมโครคอมพิวเตอร์ โดยใช้โปรแกรม R เวอร์ชัน 2.8.0 และกำหนดให้เครื่องคอมพิวเตอร์ทำงานซ้ำๆ กัน 10,000 ครั้งในแต่ละสถานการณ์

2. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

วราฤทธิ์ พานิชกิจโกศลกุล (12) เสนอวิธีการประมาณค่าฐานนิยมของข้อมูลที่มีการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยนำเทอมค่าคงที่ซึ่งขึ้นกับขนาดตัวอย่างมาปรับให้ค่าประมาณฐานนิยมมีความคลาดเคลื่อนลดลง

Gupta (13) เสนอวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Method: ML) สำหรับประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนแบบตัดปลายหาง (Truncated Inverse Gaussian Distribution)

Sanchez and He (14) ได้ศึกษาระยะเวลาที่ผู้ใช้เข้าชมเว็บไซต์หนึ่งซึ่งข้อมูลมีการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน โดยประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด

Lee and Tang (15) เสนอวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนโดยใช้วิธีอีเอ็มแบบดัดแปลง (Modified EM-algorithm) ได้แก่ ตัวประมาณอีเอ็มแบบดัดแปลง (Modified EM Estimators: MEME) และตัวประมาณความควรจะเป็นแบบดัดแปลง (Modified Maximum Likelihood Estimators: MMLE)

Arefi et al. (16) ศึกษาการประมาณค่าแบบช่วง (Interval Estimation) ของค่าเฉลี่ยของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน พบว่า ช่วงความเชื่อมั่นโดยใช้วิธีอัตราส่วนความควรจะเป็น (Likelihood Ratio Interval) มีประสิทธิภาพสูงที่สุด ส่วนวิธีของวาร์ล (Wald Interval) มีประสิทธิภาพต่ำที่สุด

3. วิธีการศึกษา

ในการศึกษาครั้งนี้มีวิธีการศึกษาดังนี้

3.1 การจำลองข้อมูลที่ใช้ในการศึกษา

จำลองข้อมูลที่ใช้โดยการสร้างตัวแปรสุ่ม X ซึ่งมีการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนด้วยพารามิเตอร์ μ และ λ ตามที่กำหนดไว้ในขอบเขตของการศึกษา

3.2 ประมาณค่าพารามิเตอร์ μ และ λ ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด

เมื่อสร้างตัวแปรสุ่ม X ที่มีการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนแล้ว ประมาณค่าพารามิเตอร์ μ และ λ ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (11)

ตัวประมาณความควรจะเป็นสูงสุดของ μ คือ

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

ตัวประมาณความควรจะเป็นสูงสุดของ λ คือ

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^{-1} - (\bar{X})^{-1}\right)}$$

3.3 ประมาณค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ของข้อมูลด้วยวิธีการที่ศึกษา

เมื่อประมาณค่าพารามิเตอร์ μ และ λ นำค่าประมาณ $\hat{\mu}$ และ $\hat{\lambda}$ ที่ได้ ประมาณค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ของข้อมูลด้วยวิธีการที่ศึกษา

1) วิธีอย่างง่าย ตัวประมาณค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ คือ

$$\hat{\gamma}_S = 3\sqrt{\frac{\hat{\mu}}{\hat{\lambda}}}$$

2) วิธีปรับค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ด้วยเทอมค่าคงที่ $(n-1)/n$ ตัวประมาณค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ คือ

$$\hat{\gamma}_{C_1} = 3\left(\frac{n-1}{n}\right)\sqrt{\frac{\hat{\mu}}{\hat{\lambda}}}$$

3) วิธีปรับค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ด้วยเทอมค่าคงที่ $(n-2)/n$ ตัวประมาณค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ คือ

$$\hat{\gamma}_{C_2} = 3\left(\frac{n-2}{n}\right)\sqrt{\frac{\hat{\mu}}{\hat{\lambda}}}$$

3.4 คำนวณค่าความเอนเอียงสัมบูรณ์และค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของค่าประมาณของวิธีการประมาณค่าแต่ละวิธี แล้วทำการเปรียบเทียบ

ค่าความเอนเอียงสัมบูรณ์ ($|Bias|$) ของค่าประมาณ คำนวณจาก

$$|Bias| = \left|\frac{\sum_{i=1}^{10,000} \hat{\gamma}_{ki}}{10,000} - \gamma\right|$$

ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) ของค่าประมาณ คำนวณจาก

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^{10,000} (\gamma - \hat{\gamma}_{ki})^2}{10,000}$$

เมื่อ γ แทน ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ของประชากร

$\hat{\gamma}_{ki}$ แทน ค่าประมาณของสัมประสิทธิ์ความเบ้ ซึ่งคำนวณจากวิธีที่ k ในการทำซ้ำครั้งที่ i

k แทน วิธีการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้

4. ผลการศึกษา

ในการนำเสนอผลการศึกษาเพื่อความสะดวกจะใช้สัญลักษณ์ต่าง ๆแทนความหมายดังนี้

S หมายถึง วิธีอย่างง่าย

C_1 หมายถึง วิธีปรับค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ด้วยเทอมค่าคงที่ $(n-1)/n$

C_2 หมายถึง วิธีปรับค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ด้วยเทอมค่าคงที่ $(n-2)/n$

$|Bias|$ หมายถึง ค่าความเอนเอียงสัมบูรณ์

MSE หมายถึง ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย

* หมายถึง วิธีการประมาณค่าที่ให้ค่า $|Bias|$ ต่ำที่สุด หรือค่า MSE ต่ำที่สุด

ผลการเปรียบเทียบค่าความเอนเอียงสัมบูรณ์ และค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของค่าประมาณ นำเสนอดังตารางที่ 1 ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

4.1 การเปรียบเทียบค่าความเอนเอียงสัมบูรณ์

ในทุกระดับของขนาดตัวอย่าง (n = 10, 20, 30, 50 และ 100) และทุกระดับของค่าพารามิเตอร์ (λ = 1, 3, 5, 10, 15 และ 20) วิธีปรับค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ด้วยเทอมค่าคงที่ $(n-2)/n$ ให้ค่าความเอนเอียงสัมบูรณ์ ($|Bias|$) ต่ำที่สุด รองลงมาคือ วิธีปรับค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ด้วยเทอมค่าคงที่ $(n-1)/n$ และวิธีอย่างง่าย ตามลำดับ

4.2 การเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย

ในทุกระดับของขนาดตัวอย่าง (n = 10, 20, 30, 50 และ 100) และทุกระดับของค่าพารามิเตอร์ (λ = 1, 3, 5, 10, 15 และ 20) วิธีปรับค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ด้วยเทอมค่าคงที่ $(n-2)/n$ ให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) ต่ำที่สุด รองลงมาคือ วิธีปรับค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ด้วยเทอมค่าคงที่ $(n-1)/n$ และวิธีอย่างง่าย ตามลำดับ

5. ตัวอย่างการประยุกต์ใช้

การประมาณค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ของข้อมูลที่มีการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้ดังนี้ ในทดสอบช่วงชีวิต (Life test) ของลูกบอล โดยเก็บรวบรวมข้อมูลความคงทนของลูกบอล จำนวน 22 ลูก (17) ข้อมูลมีดังนี้

17.88 51.96 93.12 28.92
54.12 98.64 33.00 55.56 105.12
41.52 67.80
105.84 42.12 68.64 127.92
45.60 68.64 127.92 48.48 68.88
173.40 51.84

จากนั้นประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน μ และ λ ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด ดังนี้

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = 71.67818$$

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^{-1} - (\bar{X})^{-1}\right)} = 56.13708$$

ขั้นต่อไปทำการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ โดยใช้วิธีปรับค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ด้วยเทอมค่าคงที่ $(n-2)/n$ ดังนี้

$$\hat{\gamma}_{C_2} = 3\left(\frac{n-2}{n}\right)\sqrt{\frac{\hat{\mu}}{\hat{\lambda}}} = 3\left(\frac{20}{22}\right)\sqrt{\frac{71.67818}{56.13708}}$$

$$= 3.081748$$

6. สรุปผลการศึกษา

ผลการศึกษาครั้งนี้ สรุปได้ดังนี้

วิธีปรับค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ด้วยเทอมค่าคงที่ $(n-2)/n$ ให้ค่าความเอนเอียงสัมบูรณ์ ($|Bias|$) และค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) ต่ำที่สุด ทุกกรณีที่ศึกษา รองลงมาคือ วิธีปรับค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ด้วยเทอมค่าคงที่ $(n-1)/n$ และวิธีอย่างง่าย ตามลำดับ ดังนั้นในการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ของข้อมูลที่มีการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน ควรเลือกใช้วิธีปรับค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ด้วยเทอมค่าคงที่ $(n-2)/n$ ซึ่งมีสูตรดังนี้

$$\hat{\gamma} = 3\left(\frac{n-2}{n}\right)\sqrt{\frac{\hat{\mu}}{\hat{\lambda}}}$$

โดยที่ $\hat{\mu} = \bar{X}$ และ $\hat{\lambda} = \dfrac{n}{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^{-1} - (\bar{X})^{-1}\right)}$

ตารางที่ 1 ค่าความเอนเอียงสัมบูรณ์ ($|Bias|$) และค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) ของค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเบ้ของข้อมูลที่มีการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน เมื่อค่าพารามิเตอร์ μ เท่ากับ 1

n	λ	|Bias|			MSE		
		วิธี S	วิธี C_1	วิธี C_2	วิธี S	วิธี C_1	วิธี C_2
10	1	0.9912	0.5921	0.1929*	1.2964	0.6048	0.2382*
	3	1.5461	1.2183	0.8904*	2.4318	1.5178	0.8194*
	5	1.7741	1.4626	1.1510*	3.1637	2.1521	1.3351*
	10	2.0358	1.7374	1.4389*	4.1488	3.0219	2.0732*
	15	2.1651	1.8711	1.5771*	4.6895	3.5026	2.4886*
	20	2.2453	1.9537	1.6621*	5.0427	3.8179	2.7633*
20	1	1.1223	0.9162	0.7101*	1.4242	0.9880	0.6376*
	3	1.6390	1.4705	1.3019*	2.7073	2.1812	1.7120*
	5	1.8602	1.7001	1.5400*	3.4688	2.8980	2.3785*
	10	2.1176	1.9643	1.8110*	4.4865	3.8604	3.2814*
	15	2.2448	2.0938	1.9428*	5.0400	4.3849	3.7754*
	20	2.3255	2.1757	2.0259*	5.4085	4.7341	4.1046*
30	1	1.1571	1.0185	0.8799*	1.4497	1.1410	0.8709*
	3	1.6722	1.5588	1.4453*	2.8105	2.4429	2.1011*
	5	1.8897	1.7820	1.6743*	3.5766	3.1808	2.8081*
	10	2.1443	2.0412	1.9381*	4.5993	4.1677	3.7573*
	15	2.2716	2.1701	2.0685*	5.1608	4.7097	4.2793*
	20	2.3515	2.2507	2.1500*	5.5299	5.0662	4.6228*
50	1	1.1961	1.1122	1.0283*	1.4976	1.3012	1.1190*
	3	1.6966	1.6280	1.5594*	2.8871	2.6587	2.4398*
	5	1.9114	1.8464	1.7813*	3.6569	3.4123	3.1761*
	10	2.1666	2.1043	2.0420*	4.6952	4.4290	4.1707*
	15	2.2926	2.2313	2.1699*	5.2566	4.9790	4.7090*
	20	2.3728	2.3119	2.2510*	5.6302	5.3450	5.0673*
100	1	1.2202	1.1780	1.1358*	1.5218	1.4199	1.3217*
	3	1.7137	1.6793	1.6448*	2.9412	2.8242	2.7096*
	5	1.9282	1.8955	1.8628*	3.7197	3.5946	3.4717*
	10	2.1822	2.1508	2.1195*	4.7622	4.6266	4.4928*
	15	2.3083	2.2774	2.2466*	5.3283	5.1869	5.0475*
	20	2.3880	2.3574	2.3268*	5.7025	5.5573	5.4140*

เอกสารอ้างอิง

Schrodinger, E. (1915) "Zur Theorie der Fall-und Steigversuche an Teilchen mit Brownscher Bewegung" Physikalische Zeitschrift, 16. pp.289-295

Cohen, A.C. and Whitten, B.J. (1988) Parameter Estimation in Reliability and Life Span Models. New York: Marcel Dekker pp.77

Tweedie, M.C.K. (1957) "Statistical properties of inverse Gaussian distributions" Annals of Mathematical Statistics, 28, pp.362-377

Shuster, J. (1968) "On the inverse Gaussian distribution" Journal of the American Statistical Association, 63, pp.1514-1516

Chhikara, R.S. and Folks J.L. (1989) The Inverse Gaussian Distribution: Theory, Methodology and Applications. New York: Marcel Dekker pp.1

Seshadri, V. (1994) Inverse Gaussian Distributions. Oxford: Oxford University Press pp.1

Seshadri, V. (1999) The Inverse Gaussian Distribution: Statistical Theory and Applications. New York: Springer-Verlag pp.1

Balakrisnan, N. and Chen, W.S. (1997) Tables for Order Statistics from Inverse Gaussian Distributions with Applications. Florida: CRC Press pp.1

Krishnamoorthy, K. (2006) Handbook of Statistical Distributions with Applications. Florida: Chapman & Hall pp.281

Balakrisnan, N. and Nevzorov, V.B. (2003) A Primer on Statistical Distribution. New Jersey : John Wiley & Sons pp.238

Evans, M., Hastings, N., and Peacock, B. (2000) Statistical Distributions. New York : John Wiley & Sons pp.116

วราฤทธิ์ พานิชกิจโกศลกุล (2550) "วิธีประมาณค่าฐานนิยมของข้อมูลที่มีการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน" วารสารวิชาการและวิจัย มทร.พระนคร, 1, 2. หน้า 179-185

Gupta, R.P. (1973) "Maximum likelihood estimate of the parameters of a truncated inverse Gaussian distribution" Metrika, 20, 1. pp.51-53

Sanchez, J. and He, Y. (2003) "Internet data analysis for the undergraduate statistics curriculum" Retrieved May 11 2009 from http://preprints.stat.ucla.edu/370/ams2004.pdf

Lee, Y.M. and Tang, J. (2007) "A modified EM-algorithm for estimating the parameters of inverse Gaussian distribution based on time-censored wiener degradation data" Statistica Sinica, 17. pp.873-893

Arefi, M., Mohtashami, G.R. and Vaghei, Y. (2008) "A note on interval estimation for the mean of inverse Gaussian distribution" Statistics and Operations Research Transactions, 32, 1. pp.49-56

Pavur, R.J., Edgeman, R.L. and Scott, R.C. (1992) "Quadratic statistics for the goodness-of-fit test of the inverse Gaussian distribution" IEEE Transactions in Reliability, 41. pp.118-123