

## ขอบเขตเชอร์นอฟฟ์และการประยุกต์ใช้ในฟังก์ชัน ของระบบสื่อสารดิจิทัล

\*บงการ หอมนาน

ในการพิจารณาสมรรถนะของระบบสื่อสารดิจิทัลซึ่งถือว่าเป็นระบบสื่อสารที่มีการใช้อย่างมากในปัจจุบัน เช่น ระบบสื่อสารเคลื่อนที่ และระบบสื่อสารไร้สาย เป็นต้น และระบบนี้มีแนวโน้มที่จะเติบโตมากขึ้นอีกในอนาคตระบบดังกล่าวมีความจำเป็นที่จะต้องหาความน่าจะเป็นของความผิดพลาดของข้อมูลที่ใช้ในการส่งหรือเป็นการประเมินสมรรถนะระบบโดยหาค่าพื้นที่ส่วนหางหรือส่วนปลายของฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (probability density function หรือ pdf) ของข้อมูลหรือฟังก์ชันที่สอดคล้องกับข้อมูล [1,2,3] พื้นที่ดังกล่าวนี้เรียกว่า tail probability หรือ tp ซึ่งแต่เดิมมีการนำความไม่เท่ากันของ

Chebyshev มาใช้เพื่อหาขอบเขตบน (upper bound) ให้กับพื้นที่ดังกล่าวแต่ค่าที่ได้ค่อนข้างหยาบ จึงมีการพัฒนาการวิธีการเพื่อหาค่าขอบเขตบนของพื้นที่นี้ให้ใกล้เคียงกับ tp ที่แท้จริงมากขึ้นซึ่งก็คือการใช้ขอบเขต Chernoff นั่นเอง

เนื้อหาในบทความนี้แบ่งเป็น 4 ส่วนหลัก คือ ความไม่เท่ากันของ Chebyshev, ขอบเขต Chernoff Bound, การประยุกต์ใช้ขอบเขต Chernoff สำหรับการแจกแจงแบบลาพลาซซึ่งเป็นแบบจำลองที่มักจะพบในแบบจำลองในระบบสื่อสารดิจิทัล [2] และส่วนสุดท้ายเป็นการสรุป

คำสำคัญ ขอบเขต Chernoff, ขอบเขต Chebyshev, ฟังก์ชันลาพลาซ, ระบบสื่อสารดิจิทัล

### ความไม่เท่ากันของ Chebyshev [1]

สมมติว่า  $X$  เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเฉลี่ย  $m_x$  และค่าความแปรปรวน  $\sigma_x^2$  สำหรับแต่ละค่าที่เป็นบวกของ  $\delta$  จะได้ความสัมพันธ์ “ความไม่เท่ากันของ Chebyshev” แสดงได้ดังนี้

$$P(|X - m_x| \geq \delta) \leq \frac{\sigma_x^2}{\delta^2} \quad (1)$$

ที่มาของสมการข้างต้น สามารถแสดงได้โดยการใช้หลักการสถิติพื้นฐานในการหาค่าความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มดังนี้

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p(x) dx \\ &\geq \int_{|x - m_x| \geq \delta} (x - m_x)^2 p(x) dx \\ &\geq \delta^2 \int_{|x - m_x| \geq \delta} p(x) dx = \delta^2 P(|X - m_x| \geq \delta)\end{aligned}\quad (2)$$

ต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่าความไม่เท่ากันของ Chebyshev เป็นวิธีการที่ง่ายและธรรมดาในการหาพื้นที่ของ tp โดยกำหนดให้  $Y = X - m_x$  จะได้ว่าพื้นที่ของ tp ในช่วง  $(-\infty, -\delta)$  และ  $(\delta, \infty)$  มีความสัมพันธ์กับความไม่เท่ากันของ Chebyshev ดังนี้

$$1 - [F_Y(\delta) - F_Y(-\delta)] \leq \frac{\sigma_x^2}{\delta^2}\quad (3)$$

โดย

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) \quad (-\infty < y < \infty)\quad (4)$$

ซึ่งความหมายทางกายภาพของ (4) พื้นที่ใต้กราฟของความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม  $Y$  ที่มีค่าน้อยกว่า  $y$  (3) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$1 - [F_Y(m_x + \delta) - F_Y(m_x - \delta)] \leq \frac{\sigma_x^2}{\delta^2}\quad (5)$$

อีกวิธีหนึ่งในการพิจารณาขอบเขต Chebyshev เพื่อจะนำไปเปรียบเทียบกับขอบเขต Chernoff โดยสมมติให้

$$g(Y) = \begin{cases} 1 & (|Y| \geq \delta) \\ 0 & (|Y| < \delta) \end{cases}\quad (6)$$

เนื่องจาก  $g(Y)$  มีค่า 0 หรือ 1 ด้วยความน่าจะเป็น  $P(|Y| < \delta)$  และ  $P(|Y| \geq \delta)$  ตามลำดับจะได้ค่าเฉลี่ยเป็น

$$E[g(Y)] = P(|Y| \geq \delta)\quad (7)$$

ตาม (1) เพื่อความสะดวกสมมติให้มีขอบเขตบนของ  $g(Y)$  เป็นค่าควอดราติก  $(Y/\delta)^2$  นั่นคือให้

$$g(Y) \leq \left(\frac{Y}{\delta}\right)^2 \quad (8)$$

จะได้ว่า

$$E[g(Y)] \leq E\left[\frac{Y^2}{\delta^2}\right] = \frac{E(Y^2)}{\delta^2} = \frac{\delta_y^2}{\delta^2} = \frac{\delta_x^2}{\delta^2} \quad (9)$$

และเนื่องจาก  $E[g(Y)]$  เป็น tp ดัง (7) จึงสามารถหาขอบเขต Chebyshev ได้ดังแสดงตาม (9)

#### ขอบเขต Chernoff [1,2,3]

ในสถานการณ์จริง บางครั้งจะสนใจ tp เพียงข้างเดียวคือในช่วง  $(-\infty, -\delta)$  หรือช่วง  $(\delta, \infty)$  ในที่นี้จะพิจารณาช่วง  $(\delta, \infty)$  โดยให้ฟังก์ชัน  $g(Y)$  เป็น

$$g(Y) \leq e^{v(Y-\delta)} \quad (10)$$

ซึ่ง

$$g(Y) = \begin{cases} 1 & (Y \geq \delta) \\ 0 & (Y < \delta) \end{cases} \quad (11)$$

และ  $v \geq 0$  เป็นพารามิเตอร์ที่สามารถทำการออปติไมซ์ จะได้ ค่าคาดหวังของ  $g(Y)$  คือ

$$E[g(Y)] = P(Y \geq \delta) \leq E(e^{v(Y-\delta)}) \quad (12)$$

ค่าขอบเขตบนที่ใกล้เคียง tp ที่สุดสามารถหาได้จากการเลือกค่า  $v$  ที่ทำให้  $E(e^{v(Y-\delta)})$  มีค่าน้อยที่สุด นั่นคือเป็นไปตามสมการต่อไปนี้

$$\frac{d}{dv} E(e^{v(Y-\delta)}) = 0 \quad (13)$$

จาก

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dv} E(e^{v(Y-\delta)}) &= E\left(\frac{d}{dv} e^{v(Y-\delta)}\right) \\
 &= E[(Y-\delta)e^{v(Y-\delta)}] \\
 &= e^{-v\delta} [E(Ye^{vY}) - \delta E(e^{vY})]
 \end{aligned} \tag{14}$$

ดังนั้น

$$E(Ye^{vY}) - \delta E(e^{vY}) = 0 \tag{15}$$

ให้  $v'$  เป็นคำตอบของ (15) และจาก (12) จะได้ค่าขอบเขตบนของ  $tp$  ด้านเดียวโดย  $\delta \geq 0$  เป็น

$$P(Y \geq \delta) \leq e^{-v'\delta} E(e^{v'Y}) \tag{16}$$

โดยวิธีการเดียวกันก็ได้ขอบเขตบนสำหรับ  $tp$  อีกด้านหนึ่งโดย  $\delta < 0$  เป็น

$$P(Y \leq \delta) \leq e^{-v'\delta} E(e^{v'Y}) \tag{17}$$

โดย  $\delta < 0$

เมื่อ  $Y = X - m_x$  จะได้ว่า

$$P(Y \geq \delta) = P(X \geq m_x + \delta) = P(X \geq \delta_m) \tag{18}$$

โดยที่

$$\delta_m = m_x + \delta \tag{19}$$

เมื่อใช้วิธีเดียวกับข้างต้นพบว่า

$$P(X \geq \delta_m) \leq e^{-v'\delta_m} E(e^{v'X}) \tag{20}$$

เมื่อ  $\delta_m > m_x$  และ

$$P(X \leq \delta_m) \leq e^{-v'\delta_m} E(e^{v'X}) \quad (21)$$

เมื่อ  $\delta_m < m$  โดย  $v'$  เป็นคำตอบของสมการ

$$\left[ E(Xe^{v'X}) - \delta_m E(e^{v'X}) \right] = 0 \quad (22)$$

**การประยุกต์ใช้ขอบเขต Chernoff สำหรับการแจกแจงแบบลาพลาซ**

ขอบเขต Chernoff สามารถประยุกต์ใช้กับระบบต่างๆ ในการหาขอบเขตบนได้ สำหรับการประยุกต์ใช้ในระบบสื่อสารดิจิทัลในที่นี้เป็นทฤษฎีบทที่เพิ่มเติมจาก [1,2] โดยพิจารณากรณีทั่วไปของ pdf แบบลาพลาซ (Laplace) ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ช่วยวิเคราะห์ในระบบสื่อสารดิจิทัลโดยเฉพาะระบบสื่อสารเคลื่อนที่แบบดิจิทัล [2,3] ซึ่งมีการผสมข้อมูลอัตราต่างชนิดกันในตัวกลางเดียวกันดังเช่น ระบบสื่อสารแบบมัลติมีเดีย [2]

พิจารณา pdf แบบลาพลาซ (กำหนดให้  $m_x = 0$ )

$$p(y) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|y|}{b}} \quad (23)$$

ค่า  $tp$  ที่แท้จริงของขอบเขตบนแสดงโดย

$$P(Y \geq \delta) = \int_{\delta}^{\infty} \frac{1}{2b} e^{-\frac{y}{b}} dy = \frac{1}{2} e^{-\frac{\delta}{b}} \quad (24)$$

เพื่อที่จะค่า  $v'$  ต้องหาค่าโมเมนต์  $E(Ye^{v'Y})$  และ  $E(e^{v'Y})$  ตาม (22) ซึ่งจะได้

$$E(Ye^{v'Y}) = \frac{4abv}{(v+b)^2(v-b)^2} \quad (25)$$

$$E(e^{v'Y}) = \frac{-2ab}{(v+b)(v-b)} \quad (26)$$

เมื่อแทนเข้าไปใน (22) จะได้ดังนี้

$$v'^2\delta + 2v - \delta b^2 = 0 \quad (27)$$

ซึ่งคำตอบที่เป็นค่าบวกคือ

$$v' = \frac{-1 + \sqrt{1 + (b\delta)^2}}{\delta} \quad (28)$$

และเมื่อแทนค่า  $v'$  เข้าไปใน (20) จะได้ว่า

$$P(Y \geq \delta) \leq \left( \frac{-2ab\delta^2}{(-1 + \sqrt{1 + (b\delta)^2} + b\delta)(-1 + \sqrt{1 + (b\delta)^2} - b\delta)} \right) e^{(1 - \sqrt{1 + (b\delta)^2})} = \left( \frac{ab\delta^2}{(1 - \sqrt{1 + (b\delta)^2})} \right) e^{(1 - \sqrt{1 + (b\delta)^2})} \quad (29)$$

เมื่อ  $(b\delta) \gg 1$  (29) จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$P(Y \geq \delta) \leq a\delta e^{-b\delta} \quad (30)$$

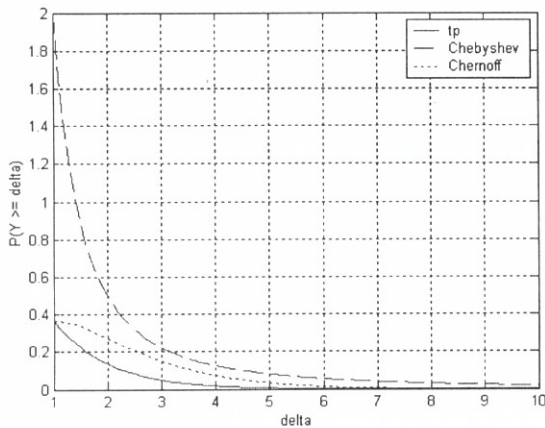
ส่วนขอบเขต Chebyshev สามารถหาได้จาก

$$P(Y \geq \delta) \leq \frac{1}{2} \frac{E(Y^2)}{\delta^2} = \frac{2a}{\delta^2 b^3} \quad (31)$$

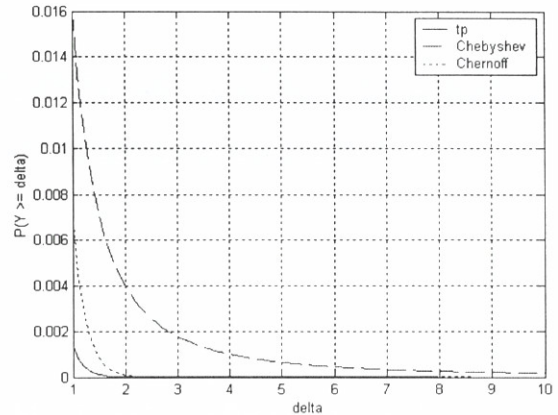
เพื่อเปรียบเทียบให้ชัดเจนมากขึ้นโดยพิจารณา  
ค่าของ  $b$  ด้วย ผลที่ได้จาก (24), (30) และ (31)  
สามารถแสดงในรูปที่ 1 และ 2 โดย  $\delta$  ที่แสดง  
ในรูปหมายถึง  $\delta$  และเนื่องจาก  $a$  ของทั้งสามกรณี  
มีแนวโน้มเดียวกันคือเป็นสัดส่วนเชิงเส้นจึงกำหนดให้  
มีค่าเป็น 1 จากรูปที่ 1 และ 2 ซึ่งมีค่า  $b$  ที่แตกต่างกัน  
จะเห็นได้ชัดเจนว่าขอบเขต Chernoff มีค่าเข้าใกล้กับ  
ค่า  $tp$  มากกว่าขอบเขต Chebyshev ทั้งสองรูป และเมื่อ  
เปรียบเทียบ (24) กับ (30) พบว่าค่า  $tp$  ที่แท้จริง  
กับค่าขอบเขตบนที่ได้จากขอบเขต Chernoff  
สอดคล้องกัน คือ มีค่าลดลงแบบเอกซ์โพเนนเชียลเมื่อ  
 $\delta$  เพิ่มขึ้น แต่ถ้า  $b$  มีค่าเพิ่มขึ้นขอบเขต Chernoff

จะลดลงแบบเอกซ์โพเนนเชียล ส่วนค่าที่พื้นที่ที่แท้จริง  
จะลดลงทั้งแบบเอกซ์โพเนนเชียลและแบบเชิงเส้น  
ยิ่งไปกว่าการลดลงแบบเอกซ์โพเนนเชียลมีผล  
มากกว่าการลดลงแบบเชิงเส้นมาก ดังนั้นขอบเขต  
Chernoff จึงยังสอดคล้องกับค่าพื้นที่ที่แท้จริง

เมื่อเปรียบเทียบ  $tp$  กับขอบเขตบนที่ได้จาก  
ขอบเขต Chebyshev ซึ่งหาได้จากค่าครึ่งหนึ่งของ  
พื้นที่ส่วนปลายของฟังก์ชันตาม (31) พบว่ามีการ  
ลดลงแบบกำลังสองและกำลังสามตามค่า  $\delta$  และ  $b$   
ที่เพิ่มขึ้นตามลำดับ ดังนั้นขอบเขต Chebyshev  
จึงเป็นขอบเขตที่หยาบเมื่อเปรียบเทียบกับขอบเขต  
Chernoff



รูปที่ 1 เปรียบเทียบค่าขอบเขตบนกับ ( $b = 1$ )



รูปที่ 2 เปรียบเทียบค่าขอบเขตบนกับ ( $b = 5$ )

## สรุป

ขอบเขต Chernoff เป็นขอบเขตที่เข้าใกล้กับ tp โดยเห็นได้ชัดเจนเมื่อเปรียบเทียบกับขอบเขต Chebyshev เพราะขอบเขต Chebyshev เป็นการประมาณที่หยาบเนื่องจากการสมมติใช้ค่าควอดราติกซึ่งเป็นการประมาณขอบเขตที่ห่างจากค่าที่แท้จริงมากไป

แม้ว่าบางองค์ประกอบของขอบเขต Chernoff จะไม่สอดคล้องกับ tp ที่แท้จริง แต่เนื่องจากการเพิ่มหรือลดลงแบบเอกซ์โพเนนเชียลจะมีผลมากกว่าการเพิ่มหรือลดลงขององค์ประกอบอื่น สำหรับสาขาวิศวกรรมไฟฟ้าสื่อสารแล้วขอบเขต Chernoff เป็นสิ่งที่สำคัญมากในการช่วยประเมินสมรรถนะระบบผลที่ได้ในบทความนี้สามารถนำไปใช้วิเคราะห์ใน

ระบบสื่อสารดิจิทัลที่มีความซับซ้อนเพิ่มเติมได้ โดยเฉพาะโครงการหนึ่งที่กำลังดำเนินการอยู่ในขณะนี้เป็นการใช้ขอบเขต Chernoff ในการวัดสมรรถนะของระบบสื่อสารเคลื่อนที่เซลล์รูปแบบ CDMA (Code Division Multiple Access)

นอกจากขอบเขต Chernoff จะสามารถประยุกต์เข้ากับฟังก์ชันที่จำเป็นทางด้านวิศวกรรมไฟฟ้าสื่อสารดังที่แสดงข้างต้นแล้ว ยังสามารถประยุกต์ใช้งานในสาขาที่คำนึงถึงขอบเขต หรืองานที่มีตัวประกอบสำหรับการชดเชยในการออกแบบ เช่น การออกแบบทางด้านวิศวกรรมโยธา หรือวิศวกรรมสาขาอื่นๆ หรือ งานบางแขนงทางด้านเศรษฐศาสตร์ เป็นต้น

## บรรณานุกรม

- Choi, W. and Kim, J.Y. "Forward-Link Capacity of a DS/CDMA System with Mixed Multirate Sources." *IEEE Transactions on Vehicular Technology*. 50, 3, May 2001 : pp. 737-749
- Gilhausen, K.S. and Others. "On the Capacity of a cellular CDMA System." *IEEE Transactions on Vehicular Technology*. 40, 2, May 1991 : pp. 303-311.
- Proakis, John G. *Digital communications*. 3rd ed. New York [NY] : McGraw-Hill, 1995.