

การพัฒนาวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปรแบบใหม่ โดยการปรับปรุงวิธีการทดสอบของเฮนซ์ - เซอร์เคลอร์

ไพศาล วรคำ

สำราญ มีแจ้ง รัตนะ บัวสนธ์ และ อรุณี อ่อนสวัสดิ์

มหาวิทยาลัยนเรศวร

บทคัดย่อ

การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาและตรวจสอบคุณภาพของวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปรแบบใหม่ โดยการเพิ่มพารามิเตอร์ทำให้เรียบเข้าไปในวิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของค่าคาดหวังความเบ้และความโค้งพหุตัวแปร

การเปรียบเทียบอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I และอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบที่พัฒนาขึ้นใหม่กับวิธีการทดสอบการแจกแจงพหุตัวแปรแบบอื่นอีก 4 วิธี ภายใต้เงื่อนไขที่หลากหลาย โดยใช้วิธีการจำลองสถานการณ์แบบมอนติ คาร์โล จำลองข้อมูล 50,000 ชุดจากการแจกแจงพหุตัวแปร 5 แบบที่มีความเบ้และความโค้ง ขนาดกลุ่มตัวอย่าง และจำนวนตัวแปร แตกต่างกัน

วิธีการทดสอบที่พัฒนาขึ้นใหม่มีอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I (ที่ระดับ .05 และ .01) ต่ำกว่าวิธีการทดสอบความเบ้พหุตัวแปรของมาร์เดียม และวิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์ ส่วนวิธีการทดสอบความโค้งพหุตัวแปรของมาร์เดียมและวิธีการทดสอบของรอยสตันไม่สามารถควบคุมอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I ได้

วิธีการทดสอบที่พัฒนาขึ้นใหม่มีอำนาจการทดสอบสูงสำหรับการแจกแจงแบบที่พหุตัวแปรและการแจกแจงไค-สแควร์พหุตัวแปร แต่มีอำนาจการทดสอบต่ำในการแจกแจงผสมปกติ เช่นเดียวกับวิธีการทดสอบความเบ้พหุตัวแปรของมาร์เดียม และวิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์ วิธีการทดสอบที่พัฒนาขึ้นใหม่ มีอำนาจการทดสอบสูงกว่าวิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์ในการแจกแจงแบบที่พหุตัวแปรและการแจกแจงไค-สแควร์พหุตัวแปร แต่มีอำนาจการทดสอบต่ำกว่าวิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์ในการแจกแจงแบบผสมปกติ

ส่วนหนึ่งของวิทยานิพนธ์ปริญญาการศึกษาคุณวุฒิปริญญาตรี สาขาวิชาวิจัยและประเมินผลการศึกษา มหาวิทยาลัยนเรศวร ปีการศึกษา 2549 อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก รศ.ดร.สำราญ มีแจ้ง และ อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม รศ.ดร.รัตนะ บัวสนธ์ และ รศ.ดร.อรุณี อ่อนสวัสดิ์

Developing a New Multivariate Normality Test by Improving on the Henze-Zirkler Method

Paisarn Worakham

Samran Mejang, Rattana Buosonte, and Arunee On-Sawad

Naresuan University, Thailand

ABSTRACT

The objective of this study was to develop and evaluate a new multivariate normality test created by adding a smoothing parameter to the Henze-Zirkler test, with the parameter based on expected values of multivariate skewness and kurtosis.

The new test's Type I error rate and power were compared to figures from four other tests of multivariate normality under a variety of conditions. Monte Carlo procedures were used to generate 50,000 data sets from six multivariate distributions having different skewness and kurtosis values, sample sizes, and number of variables.

Type I error rates of the new test (at .05 and .01) were lower than those from Mardia's measure of skewness and the Henze-Zirkler test. It was found that Mardia's measure of kurtosis and Royston's test had unacceptably high Type I error rates.

The power of the new test was found to be high for the multivariate t and chi-square distributions, but low in the case of normal mixture distributions, as was also the case with Mardia's measure of skewness and the Henze-Zirkler test. The new test's power was better than Henze-Zirkler's with multivariate t and chi-square, but lower than Henze-Zirkler against normal mixture distributions.

Based on a doctoral dissertation in Educational Research and Evaluation, Naresuan University, under the supervision of Assoc. Prof. Samran Mejang, Ph.D., Assoc. Prof. Rattana Buosonte, Ed.D., and Assoc. Prof. Arunee On-Sawad, Ph.D.

ความนำ

การแจกแจงปกติพหุตัวแปร (Multivariate normal distribution) หรือความเป็นปกติพหุตัวแปร (Multivariate normality) เป็นข้อตกลงเบื้องต้นที่สำคัญของวิธีการวิเคราะห์ทางสถิติพหุตัวแปรหลายวิธี เช่น Hotelling's T^2 , MANOVA และ Discriminant Analysis เป็นต้น การฝ่าฝืนข้อตกลงเบื้องต้นการแจกแจงปกติพหุตัวแปรจะส่งผลกระทบต่อวิธีการวิเคราะห์ทางสถิติเหล่านี้ จากการศึกษาเกี่ยวกับผลของการฝ่าฝืนข้อตกลงเบื้องต้นการแจกแจงปกติพหุตัวแปรปรากฏว่า การทดสอบเกี่ยวกับเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยมีความไวต่อความไม่เป็นปกติพหุตัวแปรเนื่องจากความเบ้ ในขณะที่การทดสอบเกี่ยวกับเมตริกซ์ความแปรปรวน-ความแปรปรวนร่วมมีความไวต่อความไม่เป็นปกติพหุตัวแปรเนื่องจากความโด่ง (Hopkins & Clay, 1963; Arnold, 1964; Everitt, 1979; Mardia, 1970; 1974; 1975) จากความสำคัญของการแจกแจงปกติพหุตัวแปรดังกล่าว จึงทำให้มีการพัฒนาวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปรขึ้น ทั้งนี้เพราะวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปรเดียวไม่อาจยืนยันความเป็นปกติพหุตัวแปรได้ กล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ ถึงแม้ทุกตัวแปรจะมีการแจกแจงเป็นปกติ แต่เมื่อพิจารณาทุกตัวแปรร่วมกันอาจจะไม่เป็นปกติพหุตัวแปรก็ได้ เนื่องจากเงื่อนไขของการแจกแจงปกติพหุตัวแปรนั้น ตัวแปรทุกตัวจะต้องมีการแจกแจงปกติ และการแจกแจงร่วมกัน (Joint distribution) ระหว่างตัวแปรจะต้องเป็นปกติด้วย

วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปรที่พัฒนาขึ้นมา ส่วนใหญ่จะเป็นการขยายวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติของตัวแปรเดียวมาใช้ เช่น วิธีการทดสอบของโคล โม โกรอฟ-สมิรโนฟ (Kolmogorov-Smirnov) คราเมอร์-วอน มิเชส (Cramer-von Mises) ซาปิโร-วิลค์ (Shapiro-Wilk) แอนเดอร์สัน-ดาร์ลิง (Anderson-Darling) และ เอฟพี-พูลเลย์ (Epps-Pulley) เป็นต้น โดยวิธีการทดสอบความเป็นปกติพหุตัวแปรที่มีอยู่ในปัจจุบัน อาจแบ่งได้เป็น 4 กลุ่มดังนี้

กลุ่มแรกเป็นวิธีการที่อาศัยกราฟความน่าจะเป็นและสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ที่ได้จากกราฟ ซึ่งเขียนขึ้นระหว่างค่าสถิติของการแจกแจงปกติมาตรฐานพหุตัวแปรกับการแจกแจงเชิงประจักษ์ เช่น Q-Q plot, Chi-square plot เป็นต้น วิธีการเหล่านี้เป็นวิธีการที่ง่าย แต่ไม่สามารถทดสอบนัยสำคัญทางสถิติได้

กลุ่มที่สอง เป็นวิธีการที่อาศัยหลักการทดสอบความกลมกลืน (Goodness-of-fit) ระหว่างการแจกแจงค่าสถิติของการแจกแจงปกติมาตรฐานพหุตัวแปรกับการแจกแจงเชิงประจักษ์ เช่น วิธีการทดสอบของมัลคอฟ-อาฟีฟ (Malkovich & Afifi, 1973) ซึ่งได้ขยายการทดสอบของโคล โม โกรอฟ-สมิรโนฟ กับการทดสอบของคราเมอร์-วอน มิเชส การทดสอบของรอยสตัน (Royston, 1983: 1992) ซึ่งเป็นการขยายการทดสอบของซาปิโร-วิลค์ เป็นต้น การทดสอบในกลุ่มนี้ใช้สถิติไค-สแควร์ เป็นสถิติทดสอบ จึงทำให้การทดสอบในกลุ่มนี้มีอำนาจการทดสอบต่ำ

กลุ่มที่สาม เป็นวิธีการทดสอบที่อาศัยค่าการวัดความเบ้และความโด่งพหุตัวแปร หรือใช้โมเมนต์ที่สาม และโมเมนต์ที่สี่ของฟังก์ชันการแจกแจงปกติพหุตัวแปรเป็นพื้นฐานในการทดสอบ จึงถือว่าเป็นวิธีการที่มีความแนบแน่น (Consistency) เช่น วิธีการทดสอบความเบ้และความโด่งพหุ ตัวแปรของมาร์เดียม (Mardia, 1970) วิธีการทดสอบความเบ้และความโด่งพร้อมกันของมาร์เดียมและ ฟอสเตอร์ (Mardia & Foster, 1983) และวิธีการทดสอบความเบ้และความโด่งพร้อมกันของมาร์เดียมและเคนท์ (Mardia & Kent, 1991) เป็นต้น วิธีการทดสอบความเบ้และความโด่งของมาร์เดียมเป็นวิธีที่มีอำนาจการทดสอบค่อนข้างสูง แต่ถูกวิจารณ์ว่า ค่าการวัดความเบ้และความโด่งพหุตัวแปรนั้นไม่เป็นอิสระต่อกัน เนื่องจากความเบ้ก็ส่งผลต่ออำนาจการทดสอบความโด่ง และความโด่งก็ส่งผลต่ออำนาจการทดสอบความเบ้ (Horswell, 1990; Horswell & Looney, 1992) แสดงให้เห็นว่าอำนาจการทดสอบความเบ้และความโด่งของมาร์เดียมไม่ใช่อำนาจการทดสอบที่แท้จริง เพราะต่างก็ส่งผลซึ่งกันและกัน แต่เมื่อนำเอาค่าการวัดความเบ้และความโด่งพหุตัวแปรมาทดสอบพร้อมกันตามวิธีของมาร์เดียมและฟอสเตอร์ และวิธีของมาร์เดียมและเคนท์ กลับพบว่ามีความอำนาจการทดสอบต่ำมาก (Mecklin, 2000)

กลุ่มที่สี่ เป็นวิธีการทดสอบที่อาศัยฟังก์ชันคุณลักษณะเชิงประจักษ์ (Empirical characteristic function) หรือวิธีที่มีความแนบแน่น เป็นวิธีการที่ใช้การแปลงรูปฟังก์ชันการแจกแจงปกติมาตรฐานพหุตัวแปร และฟังก์ชันการแจกแจงเชิงประจักษ์ให้อยู่ในรูปที่สามารถตรวจสอบความแตกต่างระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงทั้งสองได้ง่าย โดยการแปลงรูปนั้นไม่ได้ทำให้ คุณลักษณะของการแจกแจงเปลี่ยนแปลงไปจากเดิม (Affine invariant) จึงถือว่าเป็นวิธีการทดสอบ การแจกแจงปกติพหุตัวแปร โดยตรงและมีความแนบแน่นไม่แปรเปลี่ยน (Invariant consistent) เช่น การทดสอบของซีเซอร์โก (Csorgo, 1986) แบริงฮัส-เฮนซ์ (Baringhaus & Henze, 1988) และ เฮนซ์-เซอร์เคลเลอร์ (Henze & Zirkler, 1990) เป็นต้น

จากการศึกษาของเมกคลิน (Mecklin, 2000) ที่ได้เปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปรที่มีอยู่ในปัจจุบันพบว่า ยังไม่มีวิธีการใดที่มีอำนาจการทดสอบสูงสุดสำหรับทุกๆ การแจกแจง แต่ได้แนะนำให้ใช้วิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลเลอร์ เนื่องจาก เป็นวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปร โดยตรงที่มีความแนบแน่น และให้ผลการทดสอบโดยรวมดีกว่าวิธีอื่นๆ แต่ก็มีจุดอ่อนที่สำคัญคือ พารามิเตอร์ทำให้เรียบ (Smoothing parameter: β) ที่ใช้ในวิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลเลอร์นั้นยังไม่เหมาะสม เนื่องจากค่าพารามิเตอร์ทำให้เรียบแต่ละค่ามีความเหมาะสมกับลักษณะการแจกแจงที่แตกต่างกันไป ทำให้ยังไม่สามารถหาพารามิเตอร์ทำให้เรียบที่เหมาะสมกับทุกๆ การแจกแจงได้ ทั้งนี้เฮนซ์และเซอร์เคลเลอร์ยังได้เสนอแนะว่า “ยังคงต้องมีการพัฒนาพารามิเตอร์ทำให้เรียบนี้อีกต่อไป” (Henze & Zirkler, 1990: 3615)

จากความสำคัญของข้อตกลงเบื้องต้นในเรื่องความเป็นปกติพหุตัวแปรและปัญหาของวิธีการทดสอบความเป็นปกติพหุตัวแปรที่มีอยู่ในปัจจุบัน ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะพัฒนาวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปรวิธีใหม่ ที่ให้อำนาจของการทดสอบสูงและสามารถแก้ไขข้อบกพร่องของวิธีการทดสอบเดิมที่มีอยู่ในปัจจุบัน โดยการประยุกต์วิธีการทดสอบของเฮนซ์- เซอร์เคลเลอร์ ที่ถือว่าเป็นวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปรที่

ดีที่สุดที่มีอยู่ในปัจจุบัน ซึ่งมีจุดเด่นที่ใช้หลักการเปรียบเทียบฟังก์ชันคุณลักษณะเชิงประจักษ์กับฟังก์ชันคุณลักษณะเชิงสมมติฐาน อันเป็นฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นทั้งคู่ ทำให้วิธีการทดสอบมีความแม่นยำ และทำการตรวจสอบคุณภาพของวิธีการทดสอบที่พัฒนาขึ้น โดยศึกษาเปรียบเทียบอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I กับระดับนัยสำคัญของการทดสอบและวิธีการทดสอบอื่นๆ และเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบกับวิธีการทดสอบอื่นๆ ได้แก่ วิธีการทดสอบความเบ้พหุตัวแปรของมาร์เดียม วิธีการทดสอบความโด่งพหุตัวแปรของมาร์เดียม วิธีการทดสอบของรอยสตัน และวิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์

วัตถุประสงค์การวิจัย

1. เพื่อพัฒนาวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปร โดยการประยุกต์วิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์
2. เพื่อตรวจสอบคุณภาพของวิธีการทดสอบที่พัฒนาขึ้น โดยการเปรียบเทียบอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I และอำนาจการทดสอบกับเกณฑ์ และวิธีการทดสอบความเบ้พหุตัวแปรของมาร์เดียม วิธีการทดสอบความโด่งพหุตัวแปรของมาร์เดียม วิธีการทดสอบของรอยสตัน และวิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์

สมมติฐานการวิจัย

1. วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปรที่ผู้วิจัยพัฒนาขึ้น จะสามารถควบคุมอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I ได้ โดยมีอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I สูงสุดไม่เกินระดับนัยสำคัญของการทดสอบ
2. วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปรที่ผู้วิจัยพัฒนาขึ้น จะมีอำนาจการทดสอบสูงกว่าวิธีการทดสอบอื่นๆ
3. อำนาจการทดสอบจะขึ้นอยู่กับปฏิสัมพันธ์ระหว่างวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปรกับชนิดของการแจกแจง

ขอบเขตของการวิจัย

1. ข้อมูลที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นข้อมูลที่ได้จากการจำลองสถานการณ์ ด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์ โดยเทคนิคมอนติ คาร์โล ทำซ้ำจำนวน 50,000 ครั้ง
2. เงื่อนไขของข้อมูลการแจกแจงพหุตัวแปรที่นำมาศึกษาได้แก่ จำนวนตัวแปร 2 ถึง 5 ตัวแปร และขนาดของกลุ่มตัวอย่าง 25, 50, 75 และ 100
3. ตัวแปรที่ศึกษามีดังนี้

3.1 การศึกษาการควบคุมอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I (Type I error rate) โดยเปรียบเทียบอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I ของวิธีการทดสอบแต่ละวิธีกับระดับนัยสำคัญของการทดสอบ และเปรียบเทียบอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I ระหว่างวิธีการทดสอบได้แก่ วิธีการทดสอบความเบ้พหุตัวแปรของมาร์เดียม วิธีการทดสอบความโด่งพหุตัวแปรของมาร์เดียม วิธีการทดสอบของรอยสตัน วิธีการทดสอบของ

เฮนซ์-เซอร์เคลอร์ และวิธีการทดสอบที่ผู้วิจัย พัฒนาขึ้น โดยใช้แบบแผนการทดลองแบบบล็อกสุ่ม (Randomized block design : RBD-5) โดยใช้จำนวนตัวแปรและขนาดกลุ่มตัวอย่างในการจัดบล็อก

3.2 การศึกษาอำนาจการทดสอบ (Power of the test) โดยเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบระหว่างวิธีการทดสอบโดยใช้แบบแผนการทดลองแบบบล็อกสุ่มหลายปัจจัย (Randomized block factorial design: RBF-55) มีตัวแปรที่ศึกษาเป็นวิธีการทดสอบทั้ง 5 วิธีและการแจกแจงที่ไม่เป็นปกติพหุตัวแปร 5 การแจกแจง ได้แก่ การแจกแจงแบบผสมปกติที่เบ้และโค้ง การแจกแจงแบบผสมปกติที่เบ้แต่ไม่โค้ง การแจกแจงแบบผสมปกติที่สมมาตรแต่เบน การแจกแจงที่พหุตัวแปร และการแจกแจงโค-สแควร์พหุตัวแปร โดยใช้จำนวนตัวแปรและขนาดกลุ่มตัวอย่างในการจัดบล็อก

วิธีดำเนินการวิจัย

การดำเนินงานแบ่งเป็น 2 ขั้นตอนคือ ขั้นตอนแรกเป็นการพัฒนาวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปร โดยศึกษาจากทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และขั้นตอนที่ 2 เป็นการตรวจสอบคุณภาพของวิธีการทดสอบ มีรายละเอียดดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 การพัฒนาวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปร

การพัฒนาวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปรมีขั้นตอนการดำเนินงานดังนี้

1. ศึกษาจุดเด่นและจุดด้อยของวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปรของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์ จากเอกสาร แนวคิด ทฤษฎี และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง เพื่อหาแนวทางแก้ไขจุดด้อยและรักษาจุดเด่นของวิธีทดสอบ
2. กำหนดกรอบการพัฒนาวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปร
3. นำเสนอวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปรวิธีใหม่

กรอบแนวคิดการพัฒนาวิธีการทดสอบ

จากการศึกษาจุดเด่นและจุดด้อยของวิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์ ปรากฏว่า มีจุดเด่นที่อาศัยหลักการเปรียบเทียบฟังก์ชันคุณลักษณะเชิงประจักษ์กับฟังก์ชันคุณลักษณะเชิงสมมติฐาน ทำให้เป็นวิธีการทดสอบที่มีความแนบเนียนไม่แปรเปลี่ยน (Invariant consistent) แต่ก็มีจุดด้อยที่พารามิเตอร์ทำให้เปรียบเทียบไม่เหมาะสม การพัฒนาวิธีการทดสอบที่มีคุณลักษณะเด่นเช่นเดียวกับวิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์ จึงต้องอาศัยหลักการเปรียบเทียบฟังก์ชันคุณลักษณะเชิงประจักษ์กับฟังก์ชันคุณลักษณะเชิงสมมติฐาน และแก้ไขจุดด้อยโดยพัฒนาพารามิเตอร์ทำให้เปรียบเทียบตัวใหม่ขึ้นมาใช้กับวิธีการทดสอบ ซึ่งพารามิเตอร์ทำให้เปรียบเทียบที่พัฒนาขึ้นนี้จะสะท้อนลักษณะประชากรของการแจกแจงเชิงประจักษ์ ผู้วิจัยจึงนำค่าคาดหวังของการวัดความเบ้พหุตัวแปรหรือโมเมนต์ที่สามของตัวแปรสุ่มรอบค่าเฉลี่ย และค่าคาดหวังของการวัดความโค้งพหุ

ตัวแปรหรือโมเมนต์ที่สี่ของตัวแปรสุ่มรอบค่าเฉลี่ย มาใช้ในการหาพารามิเตอร์ทำให้เรียบตัวใหม่ ซึ่งค่าคาดหวังของการวัดความเบ้และความโด่งดังกล่าว จะสะท้อนลักษณะประชากรการแจกแจงของข้อมูลที่นำมาทดสอบ

ขั้นตอนที่ 2 การตรวจสอบคุณภาพของการทดสอบ

การตรวจสอบคุณภาพของวิธีการทดสอบที่พัฒนาขึ้นพิจารณาจากการควบคุมอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I และอำนาจการทดสอบ โดยการเปรียบเทียบอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I ของวิธีการทดสอบที่พัฒนาขึ้นกับระดับนัยสำคัญของการทดสอบและวิธีการทดสอบอีก 4 วิธีคือ วิธีการทดสอบความเบ้พหุตัวแปรของมาร์เตีย การทดสอบความโด่งพหุตัวแปรของมาร์เตีย วิธีการทดสอบของรอยสตันและวิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์ ส่วนอำนาจการทดสอบนั้น ทำการเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบที่พัฒนาขึ้นกับวิธีการทดสอบทั้ง 4 วิธี ภายใต้การแจกแจงที่ไม่ปกติพหุตัวแปร 5 การแจกแจงคือ การแจกแจงแบบผสมปกติที่เบ้และโด่ง การแจกแจงแบบผสมปกติที่เบ้แต่ไม่โด่ง การแจกแจงแบบผสมปกติที่สมมาตรแต่แบน การแจกแจงทีพหุตัวแปร และการแจกแจงไค-สแควร์พหุตัวแปร โดยแต่ละการแจกแจงมีจำนวนตัวแปร 2-5 ตัวแปร และกลุ่มตัวอย่างขนาด 25, 50, 75 และ 100 และใช้เทคนิคการจำลองสถานการณ์แบบ มอนติ คาร์โล ด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์ โดยการทำซ้ำจำนวน 50,000 ครั้ง

การตรวจสอบคุณภาพของวิธีการทดสอบที่พัฒนาขึ้น โดยการพิจารณาจากการควบคุมอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I นั้น ผู้วิจัยจำลองข้อมูลการแจกแจงปกติพหุตัวแปรตามวิธีการของจอห์นสัน (Johnson, 1987) ด้วยโปรแกรม Matlab 6.5 แล้วนำไปทดสอบความเป็นปกติพหุ ตัวแปรด้วยวิธีการทดสอบทั้ง 5 วิธี แจกแจงนับจำนวนครั้งที่การทดสอบแต่ละวิธีปฏิเสธสมมติฐานว่าง ที่ระดับนัยสำคัญของการทดสอบ .05 และ .01 คำนวณหาอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I แล้วนำไปเปรียบเทียบกับระดับนัยสำคัญของการทดสอบและเปรียบเทียบกันระหว่างวิธีการทดสอบตามแบบแผนการทดลองแบบบล็อกสุ่ม (RBD-5)

ส่วนการตรวจสอบคุณภาพของวิธีการทดสอบโดยการพิจารณาอำนาจการทดสอบนั้นผู้วิจัยจำลองข้อมูลการแจกแจงที่ไม่เป็นปกติพหุตัวแปรทั้ง 5 การแจกแจงตามวิธีการของจอห์นสัน (Johnson, 1987) ด้วยโปรแกรม Matlab 6.5 แล้วนำไปทดสอบความเป็นปกติพหุตัวแปรด้วยวิธีการทดสอบทั้ง 5 วิธี แจกแจงนับจำนวนครั้งที่การทดสอบแต่ละวิธีปฏิเสธสมมติฐานว่าง ที่ระดับนัยสำคัญของการทดสอบ .05 และ .01 คำนวณหา ร้อยละของการปฏิเสธสมมติฐาน (อำนาจการทดสอบ) แล้วนำไปเปรียบเทียบกันตามแบบแผนการทดลองแบบบล็อกสุ่มหลายปัจจัย (RBF-55)

การวิเคราะห์ข้อมูล

1. ใช้ z-test ในการเปรียบเทียบอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I กับระดับนัยสำคัญของการทดสอบ
2. ใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวนทางเดียวตามแบบแผนการทดลองแบบบล็อกสุ่ม ในการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I ระหว่างวิธีทดสอบ และเทียบให้เห็นโดยวิธีการของดันน์ (Dunn's method)

3. ใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวนสองทางตามแบบแผนการทดลองแบบบล็อกกลุ่มหลายปัจจัย ในการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของอำนาจการทดสอบ และเทียบให้เห็นโดยวิธีการของคันทัน

ผลการวิจัย

ข้อค้นพบในการวิจัยครั้งนี้จะนำเสนอเป็น 2 ตอนดังนี้

ตอนที่ 1 ผลการพัฒนาวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปร

จากการศึกษาจุดเด่นจุดด้อยของวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปรของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์ พบว่า วิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์มีจุดเด่นที่สำคัญดังนี้

1. เป็นวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปรที่ “แท้จริง” เพราะเป็นวิธีการที่เปรียบเทียบฟังก์ชันการแจกแจงของค่าสังเกต (หรือฟังก์ชันคุณลักษณะเชิงประจักษ์) กับฟังก์ชันการแจกแจงปกติพหุตัวแปรโดยตรง

2. เป็นวิธีการที่มีความแนบแน่น (Consistent) เนื่องจากมีรากฐานมาจากฟังก์ชันคุณลักษณะซึ่งมีการพิสูจน์ยืนยันแล้วว่า เมื่อนำมาใช้ในการทดสอบการแจกแจงปกติจะทำให้การทดสอบที่มีความแนบแน่น ทั้งในกรณีตัวแปรเดียวและกรณีหลายตัวแปร

3. เป็นวิธีการที่ให้ผลการทดสอบไม่แปรเปลี่ยนไปตามการแปลงรูปของข้อมูล (Affine invariant) ในกรณีที่เลือกใช้พารามิเตอร์ทำให้เรียบได้เหมาะสม การปรับฟังก์ชันการแจกแจงด้วยการถ่วงน้ำหนัก จะไม่ทำให้ผลการทดสอบแปรเปลี่ยนไปจากความเป็นจริง จุดเด่นข้อนี้ทำให้วิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์ มีอำนาจการทดสอบสูงกว่าการทดสอบของแบริงฮัส-เฮนซ์ ซึ่งอาศัยหลักการเดียวกันแต่ไม่มีพารามิเตอร์ทำให้เรียบ (หรือเหมือนกับใช้พารามิเตอร์ทำให้เรียบเท่ากับ 1)

4. สามารถควบคุมอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I ได้ดี และมีอำนาจการทดสอบสูง แต่ก็มีจุดอ่อนที่สำคัญคือ วิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์ จำเป็นต้องใช้พารามิเตอร์ทำให้เรียบ (β) ที่เหมาะสม เนื่องจากพารามิเตอร์ทำให้เรียบมีผลต่ออำนาจการทดสอบ หากใช้พารามิเตอร์ทำให้เรียบที่เหมาะสมจะทำให้วิธีการทดสอบมีอำนาจการทดสอบสูง แต่หากใช้พารามิเตอร์ทำให้เรียบไม่เหมาะสมก็จะทำให้อำนาจการทดสอบต่ำ โดยพารามิเตอร์ทำให้เรียบที่เฮนซ์และเซอร์เคลอร์ แนะนำให้ใช้ในการทดสอบของพวกเขา คือพารามิเตอร์ทำให้เรียบของซิลเวอร์แมน ซึ่งจากผลการศึกษาของเฮนซ์และเซอร์เคลอร์พบว่า ถ้าเลือก β ที่มีค่าแตกต่างกัน อำนาจการทดสอบก็จะแตกต่างกันไปด้วย โดยที่พารามิเตอร์ทำให้เรียบ $\beta=0.5$ จะให้ผลการทดสอบโดยรวมดีกว่า $\beta=1$, $\beta=3$ และพารามิเตอร์ทำให้เรียบของ ซิลเวอร์แมน (β_d) แต่ที่เฮนซ์และเซอร์เคลอร์ นำพารามิเตอร์ทำให้เรียบของซิลเวอร์แมนมาใช้เพราะว่าให้ค่าผันแปรไปตามจำนวนตัวแปรและขนาดกลุ่มตัวอย่าง ทำให้สามารถนำวิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์ไปใช้ได้สะดวก โดยผู้ใช้ไม่

จำเป็นต้องกำหนดพารามิเตอร์ทำให้เรียบเอง ซึ่งจากผลการศึกษาดังกล่าวชี้ให้เห็นว่า ค่าพารามิเตอร์ทำให้เรียบของซิลเวอร์แมน (β_d) ยังไม่เหมาะสม เชนซ์และเซอร์เคลอร์จึงได้เสนอแนะว่า ควรจะมีการศึกษาหาค่าพารามิเตอร์ทำให้เรียบที่มีความเหมาะสมต่อไป

เมื่อศึกษาความเป็นมาของพารามิเตอร์ทำให้เรียบของซิลเวอร์แมน (Silverman, 1986: 84-87) พบว่าพัฒนาจากการประมาณค่าความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (Probability density estimation) โดยใช้ตัวประมาณค่าส่วนกลาง สำหรับกรณีของชุดข้อมูลพหุตัวแปรที่มีการแจกแจงปกติ จึงมีความเหมาะสมกับกรณีที่ชุดข้อมูลมีการแจกแจงเป็นปกติพหุตัวแปรเท่านั้น

จากจุดเด่นและจุดด้อยของวิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์ ผู้วิจัยนำมาพัฒนาวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปรดังนี้

1. พัฒนาพารามิเตอร์ทำให้เรียบที่เหมาะสม โดยใช้ตัวประมาณค่าส่วนกลาง ในการหาความกว้างที่เหมาะสมของฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น หรือฟังก์ชันคุณลักษณะ ทำให้ได้ความกว้างที่เหมาะสมเป็น $h_{opt} = A(K)n^{-1/(p+4)}$ เมื่อ $A(K)$ เป็นค่าคงที่สำหรับข้อมูลแต่ละชุด และความกว้างที่เหมาะสมมีความสัมพันธ์กับพารามิเตอร์ทำให้เรียบเป็น $h_{opt} = \frac{1}{\beta\sqrt{2}}$ ในการหาค่าคงที่ $A(K)$ สำหรับการแจกแจงใดๆ ผู้วิจัยใช้ค่าคาดหวังของความเบ้และความโด่งพหุตัวแปร ซึ่งเป็นคุณลักษณะประชากรการแจกแจงของข้อมูลเป็นตัวกำหนด โดยมาร์เดียได้หาค่าคาดหวังการวัดความเบ้และความโด่งไว้ดังนี้ (Mardia, 1970)

$$\text{ค่าคาดหวังความเบ้} \quad E(b_{1,p}) = \frac{p(p+1)(p+2)}{n}$$

$$\text{ค่าคาดหวังความโด่ง} \quad E(b_{2,p}) = \frac{p(p+2)(n-1)}{(n+1)}$$

เนื่องจากความเบ้เป็น โมเมนต์ที่สาม และความโด่งเป็น โมเมนต์ที่สี่ การทำให้ค่าคาดหวังความเบ้และความโด่งพหุตัวแปรนี้มีมิติเดียว เพื่อให้สอดคล้องกับมิติของความกว้างจึงทำได้โดยหารอัตราส่วน

ระหว่าง $E(b_{2,p})$ ต่อ $E(b_{1,p})$ ทำให้ได้ค่าคงที่ $A(K)$ สำหรับการแจกแจงใด ๆ เป็น

$$A(K) = 2 \left[\frac{p(p+1)(n+1)}{pn(n-1)} \right]^{-1/(p+4)}$$

และพารามิเตอร์ทำให้เรียบที่ผู้วิจัยพัฒนาขึ้นมีค่าเป็น

$$\beta_p = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{pn(n-1)}{p(p+1)(n+1)} \right)^{\frac{1}{p+4}} n^{\frac{1}{p+4}}$$

2. เมื่อนำพารามิเตอร์ทำให้เรียบที่ผู้วิจัยพัฒนาขึ้นไปใช้กับวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปรที่อาศัยรากฐานของฟังก์ชันไม่เป็นลบที่เปรียบเทียบกับฟังก์ชันการแจกแจงระหว่างฟังก์ชันคุณลักษณะเชิงประจักษ์

กับฟังก์ชันคุณลักษณะเชิงสมมติฐานเช่นเดียวกับวิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์ จะได้วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปรวิธีใหม่ที่มีชื่อว่า “วิธีการทดสอบความเป็นปกติพหุตัวแปรของไพศาล” (Paisam's multivariate normality test) ซึ่งมีค่าสถิติทดสอบเป็น W โดยค่าสถิติทดสอบของวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปรที่ผู้วิจัยพัฒนาขึ้น ยังคงมีจุดเด่นเช่นเดียวกับวิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์ ดังนั้นค่าสถิติทดสอบจึงสามารถคำนวณได้จาก $W_{n,\beta} = nD_{n,\beta}$ เมื่อ

$$D_{n,\beta} = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \exp\left(-\frac{\beta_p^2}{2} D_{jk}^2\right) - 2(1 + \beta_p^2)^{-\frac{p}{2}} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \exp\left(-\frac{\beta_p^2}{2(1 + \beta_p^2)} D_{jj}^2\right) + (1 + 2\beta_p^2)^{-\frac{p}{2}}$$

โดย D_{jk}^2 เป็นระยะทาง Mahalanobis ระหว่างค่าสังเกตสองค่าก้ำกึ่งสอง หรือ

$$D_{jk}^2 = (X_j - X_k)' S_n^{-1} (X_j - X_k)$$

D_{jj}^2 เป็นระยะทาง Mahalanobis จากจุดเซ็นทรอยด์ (Centroid) ถึงค่าสังเกตก้ำกึ่งสอง หรือ

$$D_{jj}^2 = (X_j - \bar{X}_n)' S_n^{-1} (X_j - \bar{X}_n)$$

β_p เป็นพารามิเตอร์ทำให้เรียบ โดย

$$\beta_p = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{pn(n-1)}{p(p+1)(n+1)} \right)^{\frac{1}{p+4}} n^{\frac{1}{p+4}}$$

ซึ่งค่าสถิติ W จะมีการแจกแจงแบบล็อกนอร์มอล (Lognormal) โดยค่าวิกฤตของการทดสอบจะหาได้จาก

$$q_{\beta,p}(1-\alpha) = \mu_{\beta,p} \left(1 + \frac{\sigma_{\beta,p}^2}{\mu_{\beta,p}^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left(\Phi^{-1}(1-\alpha) \sqrt{\log \left(1 + \frac{\sigma_{\beta,p}^2}{\mu_{\beta,p}^2} \right)} \right)$$

เมื่อ
$$\mu_{\beta,p} = E[W_\beta(p)] = 1 - (1 + 2\beta_p^2)^{-\frac{p}{2}} \left[1 + \frac{p\beta_p^2}{1 + 2\beta_p^2} + \frac{p(p+2)\beta_p^4}{2(1 + 2\beta_p^2)^2} \right]$$

และ
$$\sigma_{\beta,p}^2 = \text{Var}[W_\beta(p)] = 2(1 + 4\beta_p^2)^{-\frac{p}{2}} + 2(1 + 2\beta_p^2)^{-p} \left[1 + \frac{2p\beta_p^4}{(1 + 2\beta_p^2)^2} + \frac{3p(p+2)\beta_p^8}{4(1 + 2\beta_p^2)^4} \right]$$

$$- 4\omega(\beta_p)^{-\frac{p}{2}} \left[1 + \frac{3p\beta_p^4}{2\omega(\beta_p)} + \frac{p(p+2)\beta_p^8}{2\omega(\beta_p)^2} \right]$$

โดย $\omega(\beta_p) = (1 + \beta_p^2)(1 + 3\beta_p^2)$

และ $\Phi^{-1}(\bullet)$ เป็นอินเวอร์สของฟังก์ชันการแจกแจงปกติมาตรฐาน

ตอนที่ 2 ผลการตรวจสอบคุณภาพของการทดสอบ

2.1 ผลการเปรียบเทียบอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I

ผลการเปรียบเทียบอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I กับเกณฑ์ คือ ระดับนัยสำคัญของการทดสอบ 2 ระดับคือ ที่ระดับ .05 และที่ระดับ .01 และเปรียบเทียบอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I ของวิธีการทดสอบที่ผู้วิจัยพัฒนาขึ้นกับอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I ของวิธีการทดสอบอื่นๆ ได้แก่ วิธีการทดสอบความเบ้พหุตัวแปรของมาร์เตีย วิธีการทดสอบความโค้งพหุตัวแปรของมาร์เตีย วิธีการทดสอบของรอยสตันและวิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์ พบว่า ที่ระดับนัยสำคัญของการทดสอบ .05 วิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์ควบคุมอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I ได้ดีที่สุด รองลงมาเป็นวิธีการทดสอบของไพศาลและวิธีการทดสอบความเบ้พหุตัวแปรของมาร์เตีย ตามลำดับ ส่วนวิธีการทดสอบความโค้งพหุตัวแปรของมาร์เตียและวิธีการทดสอบของรอยสตันไม่สามารถควบคุมอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I ได้ และที่ระดับนัยสำคัญของการทดสอบ .01 วิธีการทดสอบของไพศาลสามารถควบคุมอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I ได้ดีที่สุด รองลงมาเป็นวิธีการทดสอบความเบ้พหุตัวแปรของมาร์เตีย และวิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์ ตามลำดับ ส่วนวิธีการทดสอบความโค้งพหุตัวแปรของมาร์เตียและวิธีการทดสอบของรอยสตัน ไม่สามารถควบคุมอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I ได้

2.2 ผลการเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ

ผลการเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบที่ผู้วิจัยพัฒนาขึ้นกับอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบอื่นๆ ได้แก่ วิธีการทดสอบความเบ้พหุตัวแปรของมาร์เตีย วิธีการทดสอบความโค้งพหุตัวแปรของมาร์เตีย วิธีการทดสอบของรอยสตันและวิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์ สรุปได้ดังนี้

2.2.1 วิธีการทดสอบความโค้งพหุตัวแปรของมาร์เตียมีอำนาจการทดสอบโดยเฉลี่ยที่ระดับนัยสำคัญของการทดสอบ .05 สูงที่สุด รองลงมาคือ วิธีการทดสอบของรอยสตัน วิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์ วิธีการทดสอบของไพศาลและวิธีการทดสอบความเบ้พหุตัวแปรของมาร์เตีย ตามลำดับ โดยวิธีการทดสอบความโค้งพหุตัวแปรของมาร์เตียมีอำนาจการทดสอบโดยเฉลี่ยสูงกว่าวิธีการทดสอบความเบ้พหุตัวแปรของมาร์เตีย วิธีการทดสอบของไพศาล และวิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ส่วนวิธีการทดสอบของรอยสตันและวิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์มีอำนาจการทดสอบโดยเฉลี่ยสูงกว่าวิธีการทดสอบความเบ้พหุตัวแปรของมาร์เตียอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และ .05 ตามลำดับ และที่ระดับนัยสำคัญของการทดสอบ .01 วิธีการทดสอบความโค้งพหุตัวแปรของมาร์เตียมีอำนาจการทดสอบโดยเฉลี่ย สูงกว่าวิธีการทดสอบความเบ้พหุตัวแปรของมาร์เตียอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

2.2.2 ในกลุ่มของวิธีการทดสอบที่สามารถควบคุมอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I ได้วิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์ มีอำนาจการทดสอบสูงสุดในการแจกแจงแบบผสมปกติ ส่วนวิธีการทดสอบของไพศาลมีอำนาจการทดสอบสูงสุดในการแจกแจงแบบทีพหุตัวแปร และวิธีการทดสอบความเบ้พหุตัวแปรของ

มาร์เดียมีอำนาจการทดสอบสูงสุดในการแจกแจงโค-สแควร์พหุ ตัวแปร ในกลุ่มของวิธีการทดสอบที่ไม่สามารถควบคุมอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I ได้ วิธีการทดสอบความโค้งพหุตัวแปรของมาร์เดียมีอำนาจการทดสอบสูงสุดในทุกการแจกแจง ยกเว้นในการแจกแจงโค-สแควร์พหุตัวแปรที่วิธีการทดสอบของรอยสตันมีอำนาจการทดสอบสูงสุด

2.2.3 เมื่อจำนวนตัวแปรและขนาดกลุ่มตัวอย่างเพิ่มขึ้น อำนาจการทดสอบโดยเฉลี่ยของวิธีการทดสอบทุกวิธีจะเพิ่มขึ้นด้วย

การอภิปรายผลการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ได้ข้อค้นพบเกี่ยวกับวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปรของไพศาล ที่พัฒนาขึ้น การตรวจสอบการควบคุมอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I และอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบของไพศาลกับวิธีการอื่นๆ ตลอดจนการศึกษานิติสัมพันธ์ระหว่างวิธีการทดสอบกับรูปแบบการแจกแจง ได้ข้อค้นพบทั้งที่เป็นไปตามสมมติฐานและไม่เป็นไปตามสมมติฐาน ดังที่ผู้วิจัยจะได้นำมาอภิปรายดังต่อไปนี้

1. จากสมมติฐานการวิจัยที่กล่าวว่า วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปรที่ผู้วิจัย พัฒนาค้นขึ้นจะสามารถควบคุมอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I ได้ โดยมีอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I สูงสุดไม่เกินระดับนัยสำคัญของการทดสอบ

ผลการวิจัย ปรากฏว่า วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปรของไพศาล มีอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I สูงสุดเท่ากับ 0.0486 สำหรับการทดสอบที่ระดับนัยสำคัญ .05 และมีอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I สูงสุดเท่ากับ 0.0097 สำหรับการทดสอบที่ระดับนัยสำคัญ .01 ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานการวิจัยที่ตั้งไว้ และเมื่อเปรียบเทียบการควบคุมอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I ระหว่างวิธีการทดสอบ พบว่าวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปรของไพศาลสามารถควบคุมอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I ได้ดีที่สุด เนื่องจากมีอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I ต่ำกว่าระดับนัยสำคัญของการทดสอบทุกกรณี ในขณะที่วิธีการทดสอบที่สามารถควบคุมอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I ได้ดี อย่างเช่น วิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์ และวิธีการทดสอบความเบ้พหุตัวแปรของมาร์เดีย ยังมีบางกรณีที่มีอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I สูงกว่าระดับนัยสำคัญของการทดสอบ ทั้งนี้เนื่องจากวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปรของไพศาลนั้น พัฒนาขึ้นจากฟังก์ชันไม่เป็นลบ (Non-negative function; $D(\bullet, \bullet)$) ที่วัดระยะระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงสองฟังก์ชัน คือ ฟังก์ชันการแจกแจงตามสมมติฐาน (ฟังก์ชันการแจกแจงปกติพหุตัวแปร) และฟังก์ชันการแจกแจงของค่าสังเกต ซึ่งทั้งสองฟังก์ชันนี้อยู่ในรูปของฟังก์ชันคุณลักษณะ (Characteristic function) ทำให้ค่าสถิติมีความแนบแน่น (Consistent) นั่นคือ ฟังก์ชัน $D(\bullet, \bullet)$ หรือ

$$D_\beta(P, Q) = \int_{\mathbf{R}^d} |\hat{P}(t) - \hat{Q}(t)|^2 \varphi_\beta(t) dt$$

เมื่อ $\hat{P}(t)$ เป็นฟังก์ชันคุณลักษณะของการแจกแจงที่กำหนด (การแจกแจงปกติพหุตัวแปร) และ $\hat{Q}(t)$ เป็นฟังก์ชันคุณลักษณะเชิงประจักษ์ (การแจกแจงของค่าสังเกต) ฟังก์ชัน $D(\bullet, \bullet)$ นี้จะเท่ากับศูนย์ ถ้าข้อมูลสังเกตได้มาจากการแจกแจงปกติพหุตัวแปร (Csorgo, 1989) จึงทำให้วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปรของไพศาล สามารถควบคุมอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I ได้ดีเช่นเดียวกับวิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลเลอร์ ที่อาศัยหลักการเดียวกัน ยิ่งไปกว่านั้น ฟังก์ชันไม่เป็นลบ $D(\bullet, \bullet)$ นี้มีฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก หรือ Kernel function เป็น $\varphi_p(t)$ เมื่อ β เป็นพารามิเตอร์ทำให้เรียบ ซึ่งการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปรของไพศาล ใช้พารามิเตอร์ทำให้เรียบที่พัฒนามาจากการประมาณค่าฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นโดยใช้ตัวประมาณค่าส่วนกลาง ซึ่งเป็นตัวประมาณค่าฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นที่สามารถลดความผันแปรสุ่มของความคลาดเคลื่อนในการประมาณค่าได้ดี (Henze & Zirkler, 1990: 3600) และใช้ค่าคาดหวังของความเบ้และความโด่งพหุตัวแปรในการกำหนดค่าคงที่ของการหาความกว้างที่เหมาะสมสำหรับการหาพารามิเตอร์ทำให้เรียบ ซึ่งค่าคาดหวังของการแจกแจงหนึ่งๆ ก็คือ “ค่าที่ควรจะเป็นตามทฤษฎี หรือหลักการ ซึ่งในทางปฏิบัติจะหมายถึงค่าเฉลี่ยของทุก ๆ ค่าในบรรดาค่าที่ตัวแปรสุ่มนั้นจะเป็นได้ โดยนำเอาความน่าจะเป็นของการเกิดค่านั้นๆ เป็นตัวถ่วงน้ำหนัก หรือกล่าวได้อีกนัยหนึ่งว่า ค่าคาดหวังคือ ค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนัก (Weighted average) ของค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของตัวแปรสุ่ม” (ศิริชัย กาญจนวาสิ, 2526:132) ดังนั้น ค่าคาดหวังของความเบ้และความโด่งของการแจกแจง p ตัวแปร กลุ่มตัวอย่างขนาด n จึงเป็นค่าเฉลี่ยของความเบ้และความโด่งที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการแจกแจง p ตัวแปร กลุ่มตัวอย่างขนาด n ด้วยเหตุนี้ ค่าคาดหวังของความเบ้และความโด่งจึงสะท้อนคุณลักษณะของการแจกแจงที่แท้จริงหรือคุณลักษณะประชากรของการแจกแจง p ตัวแปร กลุ่มตัวอย่างขนาด n ทำให้พารามิเตอร์ทำให้เรียบ β_p ซึ่งเป็นฟังก์ชันของค่าคาดหวังของความเบ้และความโด่งของการแจกแจง p ตัวแปร กลุ่มตัวอย่างขนาด n ให้ความกว้างที่มีความเหมาะสมมากกว่าพารามิเตอร์ทำให้เรียบของซิลเวอร์แมน (β_d) ที่ใช้ในวิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลเลอร์ ทำให้วิธีการทดสอบของไพศาลสามารถควบคุมอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I ได้ดีกว่า การควบคุมอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I ของวิธีการทดสอบความโด่งพหุตัวแปรของมาร์เดย์ วิธีการทดสอบของรอยสตันและวิธีการทดสอบความเบ้พหุตัวแปรของมาร์เดย์ ล้วนได้ผลสอดคล้องกับผลการศึกษาที่มีมาก่อนหน้านี้ เช่น การศึกษาของเมคคลิน (Mecklin, 2000) และกุศยา ปลั่งพงษ์พันธ์ (Plungpongpun, 2003) เป็นต้น ซึ่งผู้วิจัยจะอภิปรายถึงในสมมติฐานการวิจัยข้อที่ 3

2. จากสมมติฐานการวิจัยที่กล่าวว่า วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปรที่ผู้วิจัยพัฒนาขึ้น น่าจะมีอำนาจการทดสอบสูงกว่าวิธีการทดสอบอื่น ๆ

ผลการวิจัยปรากฏว่า เมื่อพิจารณาภาพรวมของการแจกแจงที่ไม่เป็นปกติทั้งหมดที่นำมาศึกษาอำนาจการทดสอบ วิธีการทดสอบความโด่งพหุตัวแปรของมาร์เดย์มีอำนาจการทดสอบโดยเฉลี่ย ที่ระดับนัยสำคัญของการทดสอบ .05 สูงที่สุด รองลงมาคือ วิธีการทดสอบของรอยสตัน วิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลเลอร์ วิธีการทดสอบของไพศาล และวิธีการทดสอบความเบ้พหุ ตัวแปรของมาร์เดย์ ตามลำดับ ส่วนที่ระดับนัยสำคัญของ

การทดสอบ .01 วิธีการทดสอบความโค้งพหุตัวแปรของมาร์เตียมีอำนาจการทดสอบโดยเฉลี่ยสูงที่สุด รองลงมาคือ วิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์ วิธีการทดสอบของรอยสตัน วิธีการทดสอบของไพศาล และวิธีการทดสอบความเบ้พหุตัวแปรของมาร์เตีย ตามลำดับ ซึ่งจากผลการวิจัยจะเห็นว่า วิธีการทดสอบของไพศาลมีอำนาจการทดสอบต่ำกว่าอำนาจการทดสอบของวิธีอื่นๆ เกือบทั้งหมด ยกเว้นวิธีการทดสอบความเบ้พหุตัวแปรของมาร์เตียเท่านั้น ซึ่งไม่สอดคล้องกับสมมติฐานการวิจัยที่ตั้งไว้ แต่หากจะพิจารณาคุณภาพของวิธีการทดสอบหลักสำคัญที่ต้องพิจารณาเป็นอันดับแรกคือ การควบคุมอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I หากวิธีการทดสอบใดมีอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I สูงกว่าระดับนัยสำคัญของการทดสอบ วิธีการทดสอบนั้นจะไม่ได้รับการยอมรับ (Mecklin, 2000: 133) เช่นเดียวกับหลักการควบคุมความคลาดเคลื่อนในการทดสอบสมมติฐานที่ศิริชัย กาญจนวาตี (2526: 184-185) กล่าวว่า “หากเราต้องการป้องกันความคลาดเคลื่อนประเภทที่ II (Type II Error) เราสามารถทำได้โดยพยายามลดความน่าจะเป็นในการยอมรับสมมติฐานว่างที่ผิด (ลด β) จะส่งผลให้ความน่าจะเป็นในการปฏิเสธสมมติฐานว่างที่ผิดมีมากขึ้น ($1 - \beta$ สูงขึ้น) แต่ในขณะเดียวกันเมื่อ β ลดลง ความน่าจะเป็นในการปฏิเสธสมมติฐานว่างที่ถูกต้องก็จะเพิ่มขึ้น (α เพิ่ม) อย่างไม่มีทางหลีกเลี่ยง ดังนั้นการป้องกันความคลาดเคลื่อนทั้ง 2 แบบในเวลาเดียวกันจึงมีอาจะกระทำไม่ได้ ในทางปฏิบัติจึงต้องพิจารณาว่า ความคลาดเคลื่อนแบบไหนสำคัญกว่าแล้วหาทางป้องกันความคลาดเคลื่อนแบบนั้น วิธีการอันเป็นที่ยอมรับกันว่าดีที่สุดวิธีหนึ่งในหมู่นักสถิติคือ การกำหนดขนาดของค่าความน่าจะเป็นในการเกิดความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I (fix α) แล้วพยายามเลือกการทดสอบที่จะทำให้อำนาจของการทดสอบสมมติฐานมีมากที่สุด (Maximize $1 - \beta$)” จากคำกล่าวนี้จะชี้ให้เห็นว่า สาเหตุที่วิธีการทดสอบความโค้งพหุตัวแปรของมาร์เตียและวิธีการทดสอบของรอยสตันมีอำนาจการทดสอบสูง เป็นเพราะการลดความน่าจะเป็นในการยอมรับสมมติฐานว่างที่ผิด (ลด β) หรือเพิ่มความน่าจะเป็นในการปฏิเสธสมมติฐานว่างที่ถูกต้อง (α เพิ่ม) จึงไม่อาจนำอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบทั้งสองวิธีนี้มาเปรียบเทียบกับอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบที่สามารถควบคุมอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I ได้ดีอย่างวิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์ วิธีการทดสอบของไพศาลและวิธีการทดสอบความเบ้พหุตัวแปรของมาร์เตียได้

แต่เมื่อเปรียบเทียบกันภายในกลุ่มของวิธีการที่สามารถควบคุมอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I ได้ดีคือ วิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์ วิธีการทดสอบของไพศาลและวิธีการทดสอบความเบ้พหุตัวแปรของมาร์เตีย พบว่า วิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์มีอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาเป็นวิธีการทดสอบของไพศาล และวิธีการทดสอบความเบ้พหุตัวแปรของมาร์เตีย ตามลำดับ ซึ่งไม่เป็นไปตามสมมติฐานการวิจัยที่ตั้งไว้ แต่หากพิจารณาอำนาจการทดสอบในแต่ละการแจกแจงจะพบว่า วิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์มีอำนาจการทดสอบสูงกว่าวิธีการทดสอบของไพศาล เฉพาะในการแจกแจงแบบปกติผสมเท่านั้น ส่วนในการแจกแจงแบบทีพหุตัวแปร และการแจกแจงแบบโค-สแควร์พหุตัวแปร วิธีการทดสอบของไพศาลจะมีอำนาจการทดสอบสูงกว่าวิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์ ทั้งนี้เพราะว่าในกรณีของการแจกแจงปกติผสม (Mixture normal)

เป็นการแจกแจงผสมระหว่างการแจกแจงปกติ ซึ่งเป็นการแจกแจงที่ใกล้เคียงกับการแจกแจงปกติมาก ซึ่งจอห์นสัน (Johnson, 1987: 55) กล่าวถึงการแจกแจงปกติผสมไว้ว่า เป็นการแจกแจงปกติที่ไม่บริสุทธิ์ (Contaminated normal distribution) ซึ่งเป็นการแจกแจงที่คล้ายคลึงกับการแจกแจงของข้อมูลจริง (ซึ่งมักจะไม่เป็นปกติโดยสมบูรณ์) จึงเป็นที่นิยมนำไปใช้กันมากในหมู่นักวิจัยที่พัฒนาวิธีการทางสถิติที่มีความแกร่ง (Robust statistics) นั่นก็หมายความว่า เป้าหมายในการนำการแจกแจงปกติผสมไปใช้ก็เพื่อตรวจสอบว่า วิธีการทางสถิติที่พัฒนาขึ้นมานั้นมีความแกร่งหรือไม่ หรือใช้ได้กับข้อมูลที่เบี่ยงเบนไปจากปกติเล็กน้อยได้หรือไม่ ซึ่งแท้ที่จริงแล้ว ลักษณะประชากรของการแจกแจงปกติผสมก็คือการแจกแจงปกติพหุตัวแปรนั่นเอง ด้วยเหตุนี้จึง ทำให้วิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลเลอร์ มีอำนาจการทดสอบสูงกว่าวิธีการทดสอบของไพศาลเมื่อทำการทดสอบกับการแจกแจงปกติผสม ซึ่งก็สอดคล้องกับการศึกษาอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I ซึ่งทดสอบกับการแจกแจงปกติพหุตัวแปรที่พบว่า วิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลเลอร์มีอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I สูงกว่าวิธีการทดสอบของไพศาล

ส่วนในกรณีของการแจกแจงแบบที่พหุตัวแปร และการแจกแจงแบบไค-สแควร์พหุตัวแปรนั้น วิธีการทดสอบของไพศาลมีอำนาจการทดสอบสูงกว่าวิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลเลอร์ แสดงให้เห็นว่า พารามิเตอร์ทำให้เรียบ β_p ที่ใช้ในวิธีการทดสอบของไพศาล สะท้อนลักษณะการแจกแจงเชิงประจักษ์ของข้อมูลได้ดีกว่าพารามิเตอร์ทำให้เรียบของซิลเวอร์แมน (β_d) ที่ใช้ในวิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลเลอร์ ทั้งนี้เนื่องจากทั้งสองพัฒนามาจากหลักการเดียวกัน เมื่อมีอำนาจการทดสอบแตกต่างกันย่อมเป็นผลมาจากพารามิเตอร์ทำให้เรียบที่แตกต่างกัน ผลการวิจัยดังกล่าวนี้ นอกจากจะเป็นการยืนยันว่า ค่าคงที่ในกฎของสกอตต์ (Scott, 1992: 152) $h_{opt} = \sigma_i n^{-1/(p+4)}$ สามารถใช้ค่าคาดหวังของความเบ้และความโด่งพหุตัวแปรเป็นตัวกำหนดได้แล้ว ยังเป็นการยืนยันว่า การนำเอาค่าคาดหวังความเบ้และความโด่งพหุตัวแปรไปกำหนดค่าคงที่ดังกล่าว มีความเหมาะสมมากกว่าการกำหนดโดยใช้ความหนาแน่นปกติพหุตัวแปรตามวิธีการหาพารามิเตอร์ทำให้เรียบของซิลเวอร์แมน สำหรับกรณีที่นำพารามิเตอร์ทำให้เรียบนั้นมาใช้ในการทดสอบเกี่ยวกับการแจกแจง เมื่อพิจารณาอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปรของไพศาลกับวิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลเลอร์ ตามเงื่อนไขที่นำมาจับคู่การทดลอง คือจำนวนตัวแปรและขนาดกลุ่มตัวอย่างพบว่า วิธีการทดสอบทั้งสองวิธีมีอำนาจการทดสอบสูงขึ้นเมื่อจำนวนตัวแปรและขนาดกลุ่มตัวอย่างมากขึ้น และเมื่อพิจารณาให้ละเอียดลงไปในแต่ละกรณีพบว่า เมื่อจำนวนตัวแปรและขนาดกลุ่มตัวอย่างเพิ่มขึ้น วิธีการทดสอบของไพศาลมีอำนาจการทดสอบเพิ่มขึ้นในอัตราที่สูงกว่าวิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลเลอร์ ทั้งนี้เป็นเพราะว่าพารามิเตอร์ทำให้เรียบ β_p ที่ใช้ในวิธีการทดสอบของไพศาล มีลักษณะสอดคล้องกับหลักการลู่อู่เข้าในเชิงการแจกแจง (Convergence in distribution) ได้ดีกว่าพารามิเตอร์ทำให้เรียบของซิลเวอร์แมน (β_d) ที่ใช้ในวิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลเลอร์ ซึ่งหลักการลู่อู่เข้าในเชิงการแจกแจงนั้นอธิบายได้ว่า เมื่อ $X_1,$

X_2, X_3, \dots, X_n เป็นตัวแปรสุ่มที่มาจากแจกแจง $F(x)$ ถ้า $n \rightarrow \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(X) = F(x)$ (สุททาคีระนันท์, 2545: 6) นั่นก็หมายความว่า ถ้าตัวแปรสุ่ม X มาจากการแจกแจงหนึ่ง ซึ่งเป็นการแจกแจงแม่ (Parent distribution) เมื่อจำนวนตัวอย่างเพิ่มขึ้น การแจกแจงของตัวแปรสุ่ม X จะลู่เข้าหาการแจกแจงนั้น เช่น ตัวแปรสุ่ม X มาจากการแจกแจงแบบทิวหัวตัวแปร เมื่อขนาดกลุ่มตัวอย่างเพิ่มขึ้น การแจกแจงของตัวแปรสุ่ม X จะลู่เข้าหาการแจกแจงแบบทิวหัวตัวแปร เป็นต้น ดังนั้นเมื่อจำนวนตัวแปรและขนาดกลุ่มตัวอย่างเพิ่มขึ้น รูปแบบการแจกแจงแม่ก็จะมีคามชัดเจนมากยิ่งขึ้น ทำให้วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติทิวหัวตัวแปรสามารถแยกแยะ (detect) การแจกแจงนั้นออกจากการแจกแจงปกติได้มากขึ้น ส่งผลทำให้อำนาจการทดสอบเพิ่มสูงขึ้น ดังนั้นการที่วิธีการทดสอบของไพศาลมีอำนาจการทดสอบเพิ่มขึ้นในอัตราที่สูงกว่าวิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์ เมื่อจำนวนตัวแปรและขนาดกลุ่มตัวอย่างเพิ่มขึ้นนั้น จึงสามารถสรุปได้ว่า พารามิเตอร์ทำให้เรียบ β_p ที่ใช้ในวิธีการทดสอบของไพศาลนั้นมีคุณลักษณะที่สอดคล้องกับหลักการลู่เข้าในเชิงการแจกแจงได้ดีกว่าพารามิเตอร์ทำให้เรียบของซิลเวอร์แมน (β_d) ที่ใช้ในวิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์

3. จากสมมติฐานการวิจัยที่กล่าวไว้ว่า อำนาจการทดสอบน่าจะขึ้นอยู่กับปฏิสัมพันธ์ระหว่างวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติทิวหัวตัวแปรกับชนิดของการแจกแจง

ผลการวิจัยปรากฏว่า เมื่อใช้วิธีการทดสอบแตกต่างกันกับการแจกแจงที่แตกต่างกัน จะให้อำนาจการทดสอบแตกต่างกัน โดยวิธีการทดสอบความโด่งทิวหัวตัวแปรของมาร์เดียมให้อำนาจการทดสอบสูงกับทุกการแจกแจง ส่วนวิธีการทดสอบของรอยสตัน วิธีการทดสอบของไพศาล และวิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์ ให้อำนาจการทดสอบสูงกับการแจกแจงเกือบทุกการแจกแจง ยกเว้นการแจกแจงแบบผสมปกติที่สมมาตรแต่แบน และวิธีการทดสอบความเบ้ทิวหัวตัวแปรของ มาร์เดียม ให้อำนาจการทดสอบสูงกับการแจกแจงไค-สแควร์ทิวหัวตัวแปร และการแจกแจงแบบทิวหัวตัวแปร แต่ให้อำนาจการทดสอบต่ำในการแจกแจงแบบผสมปกติ ซึ่งผลการวิจัยดังกล่าวสอดคล้องกับผลการศึกษามาก่อนหน้านี้ เช่น เมกคลิน (Mecklin, 2000) และกุศยา ปลั่งพงษ์พันธ์ (Plungpongpun, 2003) เป็นต้น และสอดคล้องกับสมมติฐานการวิจัยที่ตั้งไว้ ทั้งนี้เนื่องมาจากวิธีการทดสอบแต่ละวิธีนั้น พัฒนามาจากกรอบแนวคิดที่แตกต่างกัน จึงมีข้อดีและข้อเสียที่แตกต่างกัน

จากผลการวิจัยจะเห็นว่า วิธีการทดสอบความโด่งทิวหัวตัวแปรของมาร์เดียม ให้อำนาจการทดสอบสูงกับทุกการแจกแจง แต่ก็มีจุดอ่อนที่สำคัญคือ ไม่สามารถควบคุมอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I ได้ ทำให้ความเชื่อถือนในวิธีการทดสอบนี้ต่ำ สาเหตุสำคัญที่ทำให้ให้อำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบความโด่งทิวหัวตัวแปรของมาร์เดียมมีค่าสูงกับการแจกแจงทุกรูปแบบ เป็นเพราะว่า วิธีการทดสอบความโด่งทิวหัวตัวแปรของมาร์เดียมเป็นฟังก์ชันของระยะทางมาฮาလာโนบิส (Mahalanobis distance) ยกกำลังสอง ($b_{2,p} = n^{-1} \sum_{i=1}^n [(X_i - \bar{X})' S^{-1} (X_i - \bar{X})]^2$) ซึ่งหากมีค่าสังเกตค่าใดค่าหนึ่งเป็นข้อมูลสุดโต่ง จะทำให้ค่าความโด่งทิวหัวตัวแปรมีค่ามากเมื่อเทียบกับค่าคาดหวังภายใต้การแจกแจงปกติ (DeCarlo, 1997) จึงทำให้วิธีการทดสอบความโด่งทิวหัวตัวแปรของมาร์เดียมมีความ

ໄວຕໍ່ຂໍ້ມູນສຸດໂຕ່ງມາກ ສ່ວນໃຫຍ່ອໍານາຈການທົດສອບທັງອັດຕາຄວາມຄາດເຄື່ອນປະເພດທີ່ I ຂອງວິທີການທົດສອບຄວາມໂດ່ງພຸດທ໌ແບບຂອງມາຣ໌ເດີມີຄ່າສູງ

ສໍາລັບວິທີການທົດສອບຂອງຮອຍສັດນັ້ນໃຫ້ອໍານາຈການທົດສອບສູງເກືອບທຸກການແຈກແຈງ ແຕ່ກໍ່ບໍ່ສາມາດຄວບຄຸມອັດຕາຄວາມຄາດເຄື່ອນປະເພດທີ່ I ໄດ້ເຊັ່ນເຊັ່ນກັບວິທີການທົດສອບຄວາມໂດ່ງພຸດທ໌ແບບຂອງມາຣ໌ເດີ ໂດຍວິທີການທົດສອບຂອງຮອຍສັດນັ້ນຈັດຢູ່ໃນກຸ່ມວິທີການທົດສອບທີ່ອໍາສັຍການທົດສອບຄວາມຄຸມຄື່ນຮ່ວງພິກັດສັດແຈກແຈງເຊິ່ງປະຈຸກັບພິກັດສັດແຈກແຈງປັດຕິພຸດທ໌ແບບ ແລະເປັນການຂ່າຍວິທີການທົດສອບຂອງຮາປີໂຣ-ວິລ໌ ທີ່ເປັນວິທີການທົດສອບການແຈກແຈງປັດຕິ ທັງແບບດຽວ ການພິຈາລະນາຄວາມຄຸມຄື່ນຂອງພິກັດສັດແຈກແຈງນັ້ນ ອາດເໝາະສົມສໍາລັບກຣຸນີ ທັງແບບດຽວ ແຕ່ສໍາລັບກຣຸນີຫຼາຍທັງແບບການແຈກແຈງຂອງຄ່າສັດເຈັດຈະມີຄວາມເໝາະສົມ (Rencher, 1995: 110) ຈິ່ງຍາກທີ່ຈະເກີດຄວາມຄຸມຄື່ນຮ່ວງພິກັດສັດແຈກແຈງເຊິ່ງປະຈຸກັບການແຈກແຈງປັດຕິພຸດທ໌ແບບ ທໍາໃຫ້ຄວາມນໍາເຊັ່ນໃນການປຸກສາສົມຄວາມວ່າມີສູງ ສ່ວນໃຫຍ່ວິທີການທົດສອບຂອງຮອຍສັດບໍ່ສາມາດຄວບຄຸມອັດຕາຄວາມຄາດເຄື່ອນປະເພດທີ່ I ໄດ້ ແລະທໍາໃຫ້ອໍານາຈການທົດສອບສູງໃນເກືອບທຸກການແຈກແຈງ

ໃນເວລາທີ່ວິທີການທົດສອບຂອງໄຟສາລແລະວິທີການທົດສອບຂອງເສນສ໌-ເຊອ໌ເລອ໌ເຣີໃຫ້ອໍານາຈການທົດສອບສູງກັບການແຈກແຈງເກືອບທຸກການແຈກແຈງເຊັ່ນເຊັ່ນກັບວິທີການທົດສອບຂອງຮອຍສັດ ແຕ່ວິທີການທົດສອບທັງສອງວິທີນີ້ສາມາດຄວບຄຸມອັດຕາຄວາມຄາດເຄື່ອນປະເພດທີ່ I ໄດ້ດີ ໂດຍວິທີການທົດສອບຂອງໄຟສາລຈະໃຫ້ອໍານາຈການທົດສອບສູງກວ່າວິທີການທົດສອບຂອງເສນສ໌-ເຊອ໌ເລອ໌ເຣີ ໃນກຣຸນີຂອງການແຈກແຈງໃດໆ ທີ່ບໍ່ໃຊ້ການແຈກແຈງປັດຕິສົມ ສ່ວນວິທີການທົດສອບຂອງເສນສ໌-ເຊອ໌ເລອ໌ເຣີຈະໃຫ້ອໍານາຈການທົດສອບສູງກວ່າວິທີການທົດສອບຂອງໄຟສາລໃນກຣຸນີການແຈກແຈງປັດຕິສົມ ຈິ່ງເຫຼືອໃນການສັນນິສຸນຜົນການວິຈັດຄຳວ່ານີ້ ຜູ້ວິຈັດນໍາມາອົບປະກອບໄປແລ້ວໃນຂໍ້ 2

ວິທີການທົດສອບຄວາມເບັພຸດທ໌ແບບຂອງມາຣ໌ເດີນັ້ນ ໃຫ້ອໍານາຈການທົດສອບສູງກັບການແຈກແຈງໂຄ-ສແຄວວ໌ພຸດທ໌ແບບ ແລະການແຈກແຈງແບບທີ່ພຸດທ໌ແບບ ແຕ່ໃຫ້ອໍານາຈການທົດສອບຕໍ່າໃນການແຈກແຈງແບບສົມຄວາມປັດຕິ ຈິ່ງເປັນຜົນມາຈາກວິທີການທົດສອບຄວາມເບັພຸດທ໌ແບບຂອງມາຣ໌ເດີເປັນການວັດຄວາມເບັພຸດທ໌ແບບໂດຍກົງ ດັ່ງນັ້ນຈິ່ງມີອໍານາຈການທົດສອບສູງກັບການແຈກແຈງທີ່ເບັພຸດທ໌ແບບການແຈກແຈງໂຄ-ສແຄວວ໌ພຸດທ໌ແບບ ສ່ວນກຣຸນີການແຈກແຈງແບບທີ່ພຸດທ໌ແບບນັ້ນ ວິທີການທົດສອບຄວາມເບັພຸດທ໌ແບບຂອງມາຣ໌ເດີກໍ່ມີອໍານາຈການທົດສອບສູງທັງທີ່ເປັນການແຈກແຈງທີ່ສົມຄວາມ ເປັນເພາະຄວາມບໍ່ເປັນອິສະຣະຂອງການວັດຄວາມເບັພຸດທ໌ແບບແລະຄວາມໂດ່ງພຸດທ໌ແບບ ຈິ່ງເປັນຈຸດອ່ອນທີ່ສໍາຄັນຂອງວິທີການທົດສອບຄວາມເບັພຸດທ໌ແບບແລະຄວາມໂດ່ງພຸດທ໌ແບບແຍກກັນຂອງມາຣ໌ເດີ ເພາະເມື່ອເຮົາວັດຄວາມເບັພຸດທ໌ແບບ ຈິ່ງຈະໄດ້ຮັບອິທິພົນຈາກຄວາມໂດ່ງດ້ວຍ ໃນເວລາດຽວກັນເມື່ອເຮົາວັດຄວາມໂດ່ງຈິ່ງຈະໄດ້ຮັບອິທິພົນຂອງຄວາມເບັພຸດທ໌ແບບ ເຊັ່ນ ການແຈກແຈງທີ່ໂດ່ງມາກກວ່າປັດຕິຈະມີຜົນທໍາໃຫ້ອໍານາຈການທົດສອບຄວາມເບັພຸດທ໌ແບບເພີ່ມຂຶ້ນ ໃນເວລາທີ່ການແຈກແຈງທີ່ໂດ່ງນ້ອຍກວ່າປັດຕິຈະທໍາໃຫ້ອໍານາຈການທົດສອບຄວາມເບັພຸດທ໌ແບບຕໍ່າລົງ (Horswell, 1990; Horswell & Looney, 1992) ດ້ວຍເຫຼົ່ານີ້ເມື່ອນໍາວິທີການທົດສອບຄວາມເບັພຸດທ໌ແບບຂອງມາຣ໌ເດີໄປໃຊ້ກັບການແຈກແຈງແບບທີ່ພຸດທ໌ແບບ ຈິ່ງເປັນການແຈກແຈງທີ່ໂດ່ງກວ່າປັດຕິ ຈິ່ງທໍາໃຫ້ມີອໍານາຈການທົດສອບສູງກວ່າທີ່ຄວາມຈະເປັນ ໃນເວລາທີ່ການແຈກແຈງທີ່ໂດ່ງເຄີຍກັບການແຈກແຈງປັດຕິພຸ

ตัวแปรมาก ๆ อย่างเช่น การแจกแจงผสมปกติ อำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบความเบ้พหุตัวแปรของมาร์เดียมจะมีอำนาจการทดสอบต่ำมาก

ข้อเสนอแนะ

การนำผลการวิจัยไปใช้

เนื่องจากวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปรที่มีอยู่ในปัจจุบัน รวมทั้งวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปรของไพศาลที่ผู้วิจัยพัฒนาขึ้น ยังไม่มีวิธีการทดสอบใดที่ดีที่สุดในทุกๆ สถานการณ์ ดังนั้น การเลือกใช้วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปรวิธีใดวิธีหนึ่งเพียงวิธีเดียว อาจทำให้ได้สารสนเทศที่ผิดพลาดได้ นักวิจัยจึงควรใช้วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปรหลายๆ วิธีในการตรวจสอบความเป็นปกติพหุตัวแปรของข้อมูล โดยวิธีการทดสอบที่ควรใช้เป็นวิธีหลักคือ วิธีการทดสอบของไพศาล ซึ่งสามารถควบคุมอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I ได้ดีที่สุด ทั้งที่ระดับนัยสำคัญของการทดสอบ .05 และ .01 และเป็นวิธีทดสอบที่มีอำนาจการทดสอบสูง ส่วนวิธีการทดสอบที่ควรนำมาใช้ร่วมกับวิธีการทดสอบของไพศาล ควรเป็นวิธีการทดสอบความเบ้พหุตัวแปรของมาร์เดียม และวิธีการทดสอบความโด่งพหุตัวแปรของมาร์เดียม โดยวิธีการทดสอบทั้งสองวิธีนี้นำมาใช้เพื่อวินิจฉัยความไม่เป็นปกติของชุดข้อมูล แต่ไม่อาจใช้นัยสำคัญของการทดสอบในการตัดสินใจยอมรับหรือปฏิเสธสมมติฐานว่างได้ โดยเฉพาะอย่างยิ่งวิธีการทดสอบความโด่งพหุตัวแปรของมาร์เดียมที่ไม่สามารถควบคุมอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I ได้

การวิจัยต่อไป

1. ควรทำการศึกษาเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบให้มีความครอบคลุมยิ่งขึ้น โดยใช้การแจกแจงที่หลากหลาย และนำวิธีการทดสอบที่พัฒนาขึ้นมาใหม่ๆ เข้ามาศึกษา
2. ควรมีการศึกษาอิทธิพลของจำนวนตัวแปรและขนาดของกลุ่มตัวอย่างที่มีผลต่ออำนาจการทดสอบของวิธีการต่างๆ
3. ควรมีการพัฒนาพารามิเตอร์ทำให้เรียบตัวใหม่สำหรับวิธีการทดสอบของเฮนซ์-เซอร์เคลอร์ เพื่อให้มีอำนาจการทดสอบสูงในกรณีของการแจกแจงที่ใกล้เคียงกับการแจกแจงปกติพหุตัวแปร
4. ควรมีการพัฒนาวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติพหุตัวแปร โดยการนำเอาพารามิเตอร์ทำให้เรียบ β_p ไปใช้กับวิธีการทดสอบในกลุ่มที่ใช้การวัดความกลมกลืน เพื่อให้สามารถควบคุมอัตราความคลาดเคลื่อนประเภทที่ I ได้ และมีอำนาจการทดสอบสูง

เอกสารอ้างอิง

- ศิริรัช กาญจนวาสี. (2526). *สถิติศาสตร์: หลักการและเหตุผล*. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- สุชาติ ภิระนันท์. (2545). *การอนุมานเชิงสถิติ: ทฤษฎีขั้นต้น*. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- Arnold, H.J. (1964). Permutation support for multivariate techniques. *Biometrika*. 51, 65-70.
- Baringhaus, L. & Henze, N. (1988). A consistent test for multivariate normality based on the empirical characteristic function. *Metrika* . 35, 339-348.
- Csorgo, S. (1986). Testing for normality in arbitrary dimension. *The Annals of Statistics*. 14, 708-723.
- Csorgo, S. (1989). Consistency of some tests for multivariate. *Metrika*. 36, 107-116.
- DeCarlo, L. (1997). On the meaning and use of kurtosis. *Psychological Methods*. 2, 107-116.
- Everitt, B.S. (1979). A Monte Carlo investigation of robustness of Hotelling's one and two sample T^2 tests. *Journal of the American Statistical Association*. 74, 48-51.
- Henze, N. & Zirkler, B. (1990). A class of invariant consistent tests for multivariate normality. *Communications in statistics: Theory and methods*. 19, 3595-3617.
- Hopkins, J.W. & Clay, P.P.F. (1963). Some empirical distributions of bivariate T^2 and homoscedasticity criterion M under unequal variance and leptokurtosis. *Journal of the American Statistical Association*. 58, 1048-1053.
- Horswell, R. (1990). *A Monte Carlo comparison of tests of multivariate normality based on measures of multivariate skewness and kurtosis*. Doctoral dissertation, Louisiana State University.
- Horswell, R. & Looney, S.W. (1992). A comparison of tests for multivariate normality that are based on measures of multivariate skewness and kurtosis. *Journal of Statistical Computation and Simulation*. 42, 21-38.
- Johnson, M.E. (1987). *Multivariate statistical simulation*. New York: Wiley.
- Malkovich, J.F. & Afifi, A.A. (1973). On tests for multivariate normality. *Journal of the American Statistical Association*. 68, 176-179.
- Mardia, K.V. (1970). Measures of multivariate skewness and kurtosis with applications. *Biometrika*. 57, 519-530.
- Mardia, K.V. (1974). Applications of some measures of multivariate skewness and kurtosis for testing normality and robustness studies. *Sankhya*. B36, 115-128.
- Mardia, K.V. (1975). Assessment of multinormality and the robustness of Hotelling's T^2 test. *Applied Statistics*. 24, 163-171.
- Mardia, K.V. & Foster, K. (1983). Omnibus tests of multi-normality based on skewness and kurtosis. *Communications in Statistics: Theory and Methods*. 12, 207-221.
- Mardia, K.V. & Kent, J. T. (1991). Rao score tests for goodness of fit and independence. *Biometrika*. 78, 355-363.

- Mecklin, C. (2000). *A comparison of the power of classical and newer tests of multivariate normality*. Doctoral dissertation, University of Northern Colorado.
- Plungpongpun, K. (2003). *Analysis of multivariate data using Kotz type distribution*. Doctoral dissertation, Old Dominion University.
- Rencher, A. (1995). *Methods of multivariate analysis*. New York: Wiley.
- Royston, J.P. (1983). Some techniques for assessing multivariate normality based on the Shapiro-Wilk W. *Applied Statistics*. 32, 121-133.
- Royston, J.P. (1992). Approximating the Shapiro-Wilk W-Test for non-normality. *Statistics and Computing*. 2, 117-119.
- Scott, D.W. (1992). *Multivariate density estimation: Theory, practice and visualization*. New York: John Wiley & Sons.
- Silverman, B.W. (1986). *Density estimation for statistics and data analysis*. New York: Chapman and Hall.