



การศึกษาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุเรขาคณิตแบบแผ่นบาง โดยใช้ทฤษฎีแกนขนานด้วยชุดทดลองฟิสิกส์เพนดูลัม

A study on the Moment of Inertia around the Center of Mass of the Thin Geometrical Objects based on the Parallel Axis Theorem By using Physical Pendulum Apparatus

ปิ่นแก้ว กฤษแสงโชติ, โชติ เนื่องนันท

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุเรขาคณิตแบบแผ่นบาง โดยใช้ทฤษฎีแกนขนานด้วยชุดทดลองฟิสิกส์เพนดูลัม โดยการใช้แผ่นอะคริลิกวัตถุเรขาคณิตสามรูปแบบ ได้แก่ สี่เหลี่ยมผืนผ้า สามเหลี่ยมมุมฉาก และสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เพื่อศึกษาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวล จุดศูนย์กลางของมวล การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกและทฤษฎีแกนขนานด้วยชุดทดลองฟิสิกส์เพนดูลัม ผลการวิจัยพบว่า ค่าโมเมนต์ความเฉื่อย รอบจุดศูนย์กลางมวลที่ได้จากการทดลองมีความสอดคล้องกับค่าการคำนวณทางทฤษฎีอย่างยอดเยี่ยม โดยพบว่า มีความแตกต่างกันไม่เกินร้อยละ 5 กรณีการศึกษาแนวโน้มของตำแหน่งที่ทำให้คาบการแกว่งมีค่าน้อยสุด โดยนำข้อมูลคาบเฉลี่ยมาเขียนกราฟระหว่างคาบเฉลี่ยกับระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางมวล ทำให้ได้ความสัมพันธ์ของคาบเฉลี่ยกับระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางมวลในรูปของสมการพหุนามกำลังสอง และสมการพหุนามกำลังสี่ ทำการหาจุดวิกฤติเพื่อคำนวณคาบเวลาเฉลี่ยในการแกว่งที่น้อยที่สุด และเทียบกับค่าเวลาที่น้อยที่สุดทางทฤษฎี พบว่า คาบเวลาเฉลี่ยที่น้อยที่สุดที่เกิดจากผลการแกว่ง และเปรียบเทียบกับผลการคำนวณทางทฤษฎีพบว่า มีความใกล้เคียงกันอย่างมาก โดยมีค่าความแตกต่างกันในระดับมิลลิวินาทีเท่านั้น งานวิจัยนี้ยังนำเสนอรูปแบบการทำารทดลองอย่างง่าย ประหยัด สำหรับการศึกษาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุเรขาคณิตแบบแผ่นบาง

คำสำคัญ : โมเมนต์ความเฉื่อย, ฟิสิกส์เพนดูลัม, ทฤษฎีแกนขนาน

Abstract

The study on the moment of inertia around the center of mass of the thin geometrical objects base on the parallel axis theorem by using physical pendulum apparatus is reported. The symmetrical test included rectangle, right triangle and isosceles triangle to study on the moment of inertia, the periodic oscillations minimum position, the harmonic motion of a physical pendulum and the parallel axis theorem. The experimental results found that the moment of inertia around the center of mass were in good agreement with theoretical calculation values within 5% error. The positions of the minimum period of physical pendulum were also in good agreement between the experimental results and theoretical calculated values within the order of millisecond. We also showed a simple experiment using very low cost experiment for investigating the subjects with symmetrical test.

Keywords : Moment of Inertia, Physical Pendulum, Parallel Axis Theorem



บทนำ

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายด้วยชุดทดลองฟิสิกส์เพนดูลัมด้วยมุมขนาดเล็ก และทฤษฎีแก๊นขนาน เพื่อหาโมเมนต์ความเฉื่อยโดยปกติมีการศึกษาทั้งในระดับมัธยมศึกษา และระดับอุดมศึกษา (Russeva และคณะ, 2010)

จากหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (กระทรวงศึกษาธิการ, 2552) วิชาฟิสิกส์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ในส่วนเนื้อหาเรื่องการเคลื่อนที่แบบหมุน ได้มีการกำหนดสูตรสำเร็จที่ใช้หาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนตั้งฉากกับระนาบ ที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล ของวัตถุรูปทรงเรขาคณิตแบบต่างๆ โดยมีได้แสดงที่มาของสูตร ซึ่งผู้เรียนต้องใช้ทักษะด้านความจำเพียงอย่างเดียวในการนำไปประยุกต์ใช้คำนวณในเรื่อง พลังงานจากการหมุน ทอร์ก หรือโมเมนต์เชิงมุม ส่วนการศึกษาในระดับอุดมศึกษาชั้นปีที่ 1-2 วิชาฟิสิกส์ในหัวข้อเดียวกันนั้น (Cutnell & Johnson, 2005) มักให้ผู้เรียนใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์เชิงแคลคูลัส ในการหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนตั้งฉากกับระนาบ ที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล ซึ่งค่อนข้างยุ่งยาก ถึงแม้ว่าการจำและการคำนวณจะเป็นความรู้ที่คงทน แต่ผู้เรียนจะขาดทักษะการค้นคว้าทดลองลงมือปฏิบัติ ทำให้ผู้เรียนไม่ได้ใช้ทักษะกระบวนการทางวิทยาศาสตร์ นำไปสู่การเรียนรู้ด้วยตนเองอย่างแท้จริง

กระบวนการขั้นตอนในการทดลอง และตัวอย่างในการศึกษาสามารถหารายละเอียดได้โดยทั่วไป (Stroud และ Matthew, 1987) อย่างไรก็ตามทฤษฎีแก๊นขนาน หรือทฤษฎีสไตน์เนอร์ใช้สำหรับอุปกรณ์ที่เป็นแผ่นบางและมีรูปร่างแน่นอน โดยส่วนมากแล้วจะศึกษาวัตถุที่มีลักษณะทางกายภาพที่สมดุลง เช่นแผ่นดิสก์ Russeva และคณะ (Russeva และคณะ, 2010) ได้ศึกษาทดลองตรวจสอบทฤษฎีแก๊นขนานของสไตน์เนอร์ โดยใช้วัตถุแผ่นบางรูปปลาวาฬเป็นลูกตุ้มฟิสิกส์ ผลการวิจัยพบว่า ค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกมีค่า 9.8 ± 0.5 เมตร*วินาที⁻² และอัตราส่วนระหว่าง $I_{Z_{CM}} / m$ คือ 0.014 ± 0.0005 เมตร² และขณะที่มวล 26 กรัม จะได้ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยที่ $(0.27 \pm 0.01) \times 10^{-3}$ กิโลกรัม*เมตร²

ในงานวิจัยนี้คือการศึกษาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบางด้วยชุดทดลองฟิสิกส์เพนดูลัมอย่างง่าย เป็นอาศัยทฤษฎีแก๊นขนานของสไตน์เนอร์ตามสมการ $I = I_{CM} + md^2$ โดยใช้ลูกตุ้มฟิสิกส์รูปเรขาคณิตแบบแผ่นบาง รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยจับเวลาหาคาบการแกว่งของลูกตุ้ม ณ ตำแหน่งแขวนต่างๆ และนำไปสู่การคำนวณย้อนกลับเพื่อหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนตั้งฉากกับระนาบที่ผ่านจุดศูนย์กลาง

มวลจากสมการ $T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{Z_{CM}} + md^2}{mgd}}$ และสมการนอกจากนั้น

การศึกษา $I_{Z_{CM}} = \frac{mgdT^2}{4\pi^2} - md^2$ แนวโน้มของตำแหน่งที่

ทำให้คาบการแกว่งมีค่าน้อยสุด เพื่อตรวจสอบทฤษฎีและประโยชน์ของงานวิจัยนี้จะทำให้ผู้เรียนได้นำวิธีการเหล่านี้ไปใช้ในการคำนวณหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนตั้งฉากกับระนาบ ที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบาง สำหรับวิชาฟิสิกส์เรื่องโมเมนต์ความเฉื่อย โดยใช้วัสดุ/อุปกรณ์ที่มีราคาถูกและหาได้ง่ายตามท้องถิ่นที่ เหมาะสำหรับการเรียนการสอนในปัจจุบัน เพื่อพัฒนาศักยภาพด้านการเรียนการสอนวิชาฟิสิกส์ระดับมัธยมศึกษา และอุดมศึกษาในระดับชั้นปีที่ 1 และ 2

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อออกแบบชุดทดลองฟิสิกส์เพนดูลัมรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบาง
2. เพื่อหาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวลของแผ่นอะคริลิกรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า สามเหลี่ยมมุมฉาก และสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยใช้ทฤษฎีแก๊นขนาน
3. เพื่อตรวจสอบทฤษฎีแก๊นขนาน โดยการเปรียบเทียบค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบางที่ได้จากชุดทดลองกับการคำนวณโดยวิธีแคลคูลัส
4. เพื่อตรวจสอบแนวโน้มของตำแหน่งที่ทำให้คาบการแกว่งมีค่าน้อยสุดคาบเวลาเมื่อเลื่อนตำแหน่งออกตามแนวขนานวัดจากจุดศูนย์กลางมวลของแผ่นวัตถุรูปเรขาคณิต

ขอบเขตของการวิจัย

หาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนตั้งฉากกับระนาบของแผ่นวัตถุที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล ($I_{Z_{CM}}$) ของวัตถุแข็งเกร็งแบบแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า สามเหลี่ยมมุมฉาก สามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยใช้การทดลองลูกตุ้มฟิสิกส์ และคำนวณกลับโดยใช้ทฤษฎีแก๊นขนานของสไตน์เนอร์

ตรวจสอบค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนตั้งฉากกับระนาบของแผ่นวัตถุที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลที่ได้จากการทดลองลูกตุ้มฟิสิกส์ กับค่าที่ได้จากสูตรสำเร็จที่ได้จากคณิตศาสตร์แบบแคลคูลัส

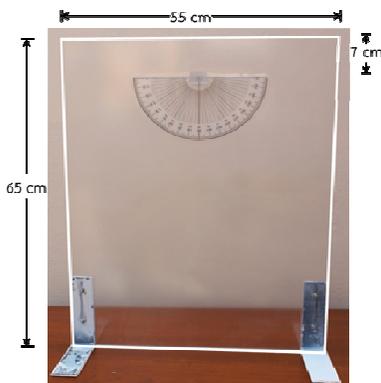
ตรวจสอบแนวโน้มของคาบเวลาเมื่อเลื่อนตำแหน่งออกตามแนวขนานวัดจากจุดศูนย์กลางมวลแผ่นวัตถุรูปเรขาคณิตที่ทำให้ได้คาบเวลาน้อยที่สุดในการแกว่ง โดยเปรียบเทียบกับผลทางคณิตศาสตร์แบบแคลคูลัส



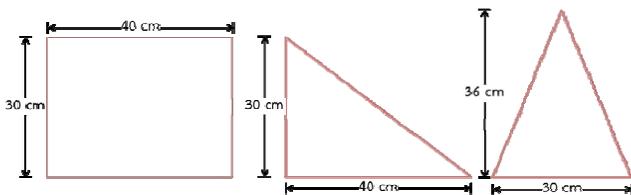
อุปกรณ์และวิธีดำเนินการวิจัย

ออกแบบชุดทดลอง

ชุดทดลองพร้อมขาตั้งที่ทำจากแผ่นอะครีลิคใส หน้า 1 เซนติเมตร มีความกว้าง 55 เซนติเมตร และสูง 65 เซนติเมตร โดยมีสติกเกอร์ครึ่งวงกลมสำหรับวัดมุมติดอยู่ ในที่นี้ใช้เข็มเย็บผ้าเบอร์ 15 จะทำหน้าที่เป็นจุดแขวนวัตถุทดสอบ โดยอยู่ตรงจุดกึ่งกลางของแผ่นอะครีลิคใส และห่างจากขอบบนเป็นระยะ 6 เซนติเมตร ชุดทดลองที่ออกแบบสำหรับการวิจัยครั้งนี้แสดงดังภาพที่ 1(ก) และแผ่นอะครีลิคขนาดหนา 3 มิลลิเมตร ตัดให้เป็นรูปทรงเรขาคณิตแบบสี่เหลี่ยมผืนผ้า สามเหลี่ยมมุมฉาก และสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ซึ่งมีขนาดต่างๆ กัน แสดงดังภาพที่ 1(ข)



(ก)



(ข)

ภาพที่ 1 อุปกรณ์ทดลอง (ก) ชุดทดลอง
(ข) แผ่นอะครีลิกรูปทรงเรขาคณิตพร้อมขนาด

วิธีดำเนินการวิจัย

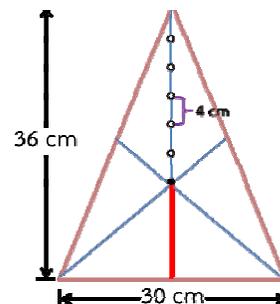
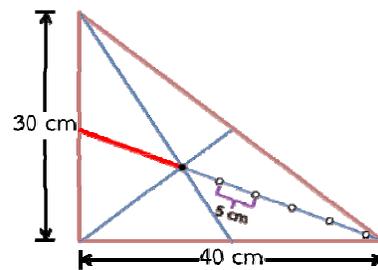
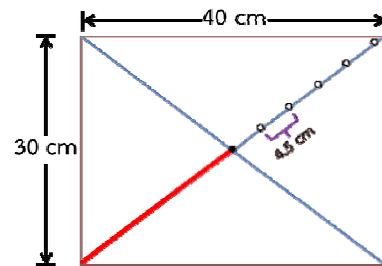
การดำเนินการวิจัยในครั้งนี้แบ่งเป็น 3 ขั้นตอน คือ การหาจุดศูนย์กลางมวลของแผ่นอะครีลิกรูปทรงเรขาคณิต การหาคาบการแกว่งของวัสดุที่ศึกษา และการหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนตั้งฉากกับระนาบของแผ่นวัตถุที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล ($I_{Z_{CM}}$)

ขั้นที่ 1 การหาจุดศูนย์กลางมวล

1. หาดำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลของแผ่นอะครีลิคโดยการลากเส้นทะแยงมุมจำนวน 2 เส้นสำหรับรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และลากเส้นมัธยฐาน 3 เส้น สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จุดตัดของเส้นทะแยงมุม หรือเส้นมัธยฐานจะเป็นตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลของแต่ละแผ่น เจาะรูไว้

2. ลากเส้นตรง จากตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวล ไปยังมุมทุกมุมบนแผ่นอะครีลิค และเลือกเส้นตรงที่มีความยาวมากที่สุดบนแผ่นอะครีลิคแต่ละแผ่นเป็นแนวในการเจาะรู

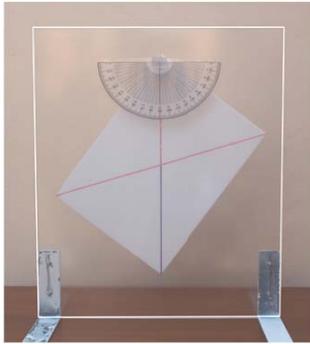
3. ทำเครื่องหมายทุกๆ 4.50 เซนติเมตร สำหรับแผ่นอะครีลิกรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า 5.00 เซนติเมตร สำหรับแผ่นอะครีลิกรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และ 4.00 เซนติเมตร สำหรับแผ่นอะครีลิกรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และเจาะรูเพื่อจะทำให้แผ่นอะครีลิคแต่ละแผ่นมีจุดแขวนทั้งสิ้น 5 จุด ดังภาพที่ 2 ข้อควรระวังคือ ขนาดของรูที่เจาะสำหรับแขวนให้มีความพอดีกับจุดแขวนคือเข็มเย็บผ้าเบอร์ 15 และไม่ให้ความฝืด



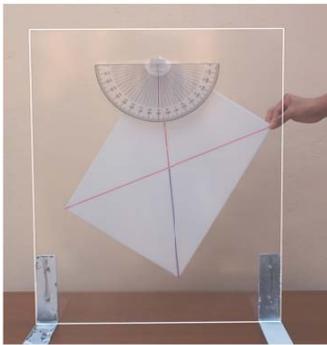
ภาพที่ 2 แผ่นอะครีลิคที่ใช้ในการทดลอง และจุดแขวน 5 จุด

ขั้นที่ 2 การหาคาบการแกว่งของวัตถุ

1. แขวนแผ่นอะครีลิกรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าไว้กับเข็มบนชุดทดลอง โดยเลือกจุดที่อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวลมากที่สุดเป็นจุดแรกในการแขวน และแกว่งให้เคลื่อนไปกลับแบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายที่มุมไม่เกิน 5 องศา ดังภาพที่ 3 จำนวน 20 รอบ นำเวลาการแกว่ง 20 รอบ มาหาคาบการแกว่ง จากนั้นทำซ้ำอีก 4 ครั้ง ที่จุดแขวนเดียวกันนี้ แล้วหาคาบการแกว่งเฉลี่ย (TAV) บันทึกผล



(ก)



(ข)

ภาพที่ 3 การแขวนและแกว่งแผ่นอะครีลิค (ก) เมื่อแขวนตั้ง (ข) เมื่อตั้งลูกตุ้มฟิสิกส์ให้ออกจากสมดุลไม่เกิน 5 องศา

2. ทำการทดลองแบบข้อ 1 แต่เลื่อนจุดแขวนให้เข้าใกล้จุดศูนย์กลางมวลอีก 1 ระยะ ทำการทดลองให้ครบทั้ง 5 จุดแขวนบันทึกผล
3. นำค่าคาบเฉลี่ยที่ได้ในแต่ละตำแหน่งรูแขวน มาคำนวณหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนตั้งฉากกับระนาบของแผ่นวัตถุที่

$$\text{ผ่านจุดศูนย์กลางมวล } (I_{Z_{CM}}) \text{ ตามสมการ } I_{Z_{CM}} = \frac{mgdT^2}{4\pi^2} - md^2$$

และเปรียบเทียบผลกับค่าทางทฤษฎีโดยหาความคลาดเคลื่อนเป็นร้อยละ

4. ทำการทดลองในข้อที่ 1 - 3 กับแผ่นอะครีลิกรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ตามลำดับ

ขั้นที่ 3 การศึกษาแนวโน้มของคาบการแกว่ง

1. เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างคาบการแกว่งเฉลี่ย (T_{AV} , วินาที) กับระยะห่างจากจุดศูนย์กลางมวลและหาความสัมพันธ์ดังกล่าวโดยสร้างเส้นแนวโน้มและระบุสมการพหุนามกำลังสอง และพหุนามกำลังสี่
2. หาจุดวิกฤตจากสมการ และแทนกลับลงในสมการพหุนาม เพื่อหาค่าคาบเวลาเฉลี่ยที่ต่ำที่สุดที่เกิดจากการทดลอง ($T_{MIN-CRISIS}$)
3. เจาะรูที่ d_r (ตำแหน่งที่ทำให้ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยที่ตั้งได้ฉาก มีค่าเป็นสองเท่าของโมเมนต์ความเฉื่อยที่ผ่านจุดศูนย์กลาง) เพิ่มอีก 1 จุดบนแผ่นอะครีลิกรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า แฉวนและแกว่งที่จุดนี้ 20 รอบ จำนวน 5 ครั้ง หาค่าคาบเฉลี่ย ซึ่งตามทฤษฎีคาบเวลานี้จะเป็นคาบเวลาที่ต่ำที่สุดทางทฤษฎี ($T_{MIN-THEORY}$) แล้วทำการเปรียบเทียบค่าเวลาที่น้อยที่สุดจากการทดลอง และจากทฤษฎี ($T_{MIN-CRISIS}$ และ $T_{MIN-THEORY}$)

4. ทำการทดลองซ้ำกับแผ่นอะครีลิกรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ตามลำดับ

ผลการวิจัย

ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนตั้งฉากกับระนาบของแผ่นวัตถุที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล ($I_{Z_{CM}}$) แสดงผลดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 แสดงการเปรียบเทียบค่า ที่เกิดจากการทดลอง และทางทฤษฎี

รูปร่าง	ระยะห่างจากจุดแขวน [d] (cm)	คาบเฉลี่ย [T_{AV}] (s)	ค่า $I_{Z_{CM}}$ โดยแทนค่า T_{AV} และ d ในสมการ $I_{Z_{CM}} = \frac{mgdT^2}{4\pi^2} - md^2$ ($kg \cdot m^2$)	ค่า $I_{Z_{CM}}$ ทางทฤษฎี ($kg \cdot m^2$)	ความคลาดเคลื่อน (%)
สี่เหลี่ยมผืนผ้า	22.50	1.13	0.00886	0.00877	-1.07
กว้าง 0.30 เมตร	18.00	1.09	0.00890	สำหรับสี่เหลี่ยมผืนผ้า $\left[\frac{1}{12} m (A^2 + B^2) \right]$	-1.52
ยาว 0.40 เมตร	13.50	1.07	0.00864		1.48
มวล 0.421 กิโลกรัม	9.00	1.13	0.00868		1.06
	4.50	1.42	0.00862		1.67

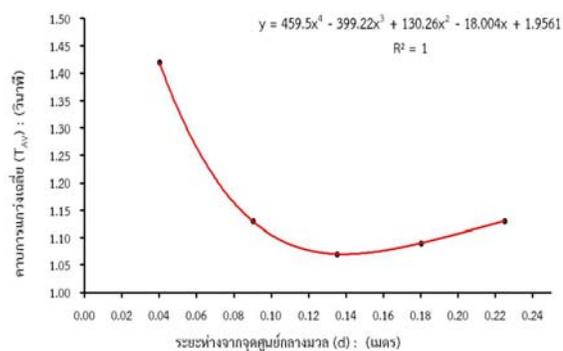
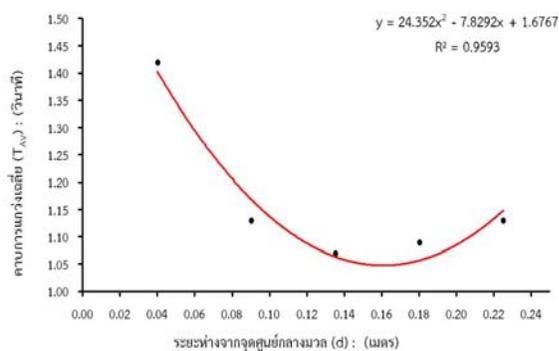


ตารางที่ 1 (ต่อ) แสดงการเปรียบเทียบค่า ที่เกิดจากการทดลอง และทางทฤษฎี

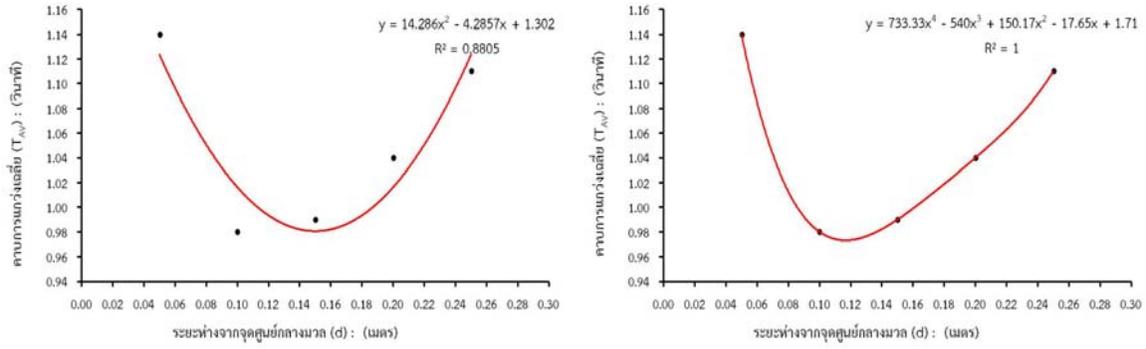
รูปร่าง	ระยะห่าง จาก จุดแขวน [d] (cm)	คาบ เฉลี่ย [T _{AV}] (s)	ค่า I _{Z_{CM}} โดยแทนค่า T _{AV} และ d ในสมการ $I_{Z_{CM}} = \frac{mgdT^2}{4\pi^2} - md^2$ (kg·m ²)	ค่า I _{Z_{CM}} ทางทฤษฎี (kg·m ²)	ความ คลาดเคลื่อน (%)
สามเหลี่ยมมุมฉาก	25.00	1.11	0.00283	0.00288	1.60
ฐานยาว 0.40 เมตร	20.00	1.04	0.00289	สำหรับสามเหลี่ยมมุมฉาก $\left[\frac{1}{18}m(A^2 + B^2) \right]$	-0.64
ความสูง 0.30 เมตร	15.00	0.99	0.00291		-1.32
มวล 0.207 กิโลกรัม	10.00	0.98	0.00291		-1.29
	5.00	1.14	0.00281		2.38
สามเหลี่ยมหน้าจั่ว	20.00	1.02	0.00236	0.00239	1.51
ฐานยาว 0.30 เมตร	16.00	0.98	0.00240	สำหรับสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $\left[\frac{1}{18}m(A^2 + B^2) \right]$	-0.25
ความสูง 0.36 เมตร	12.00	0.94	0.00236		1.31
มวล 0.196 กรัม	8.00	0.96	0.00237		0.77
	4.00	1.16	0.00230		3.68

ขั้นการศึกษาแนวโน้มของคาบการแกว่ง เมื่อนำค่าคาบเฉลี่ย (T_{AV}) กับ ระยะห่างจากจุดแขวน (d) มาเขียนกราฟและสร้างเส้นแนวโน้ม และสมการพหุนามกำลังสี่ ซึ่งลักษณะกราฟเป็นพาราโบลา และมีสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ (R²) ที่สูงกว่าสมการพหุนามกำลังสอง จะได้กราฟ และสมการและเส้นแนวโน้มดังภาพที่ 4-6

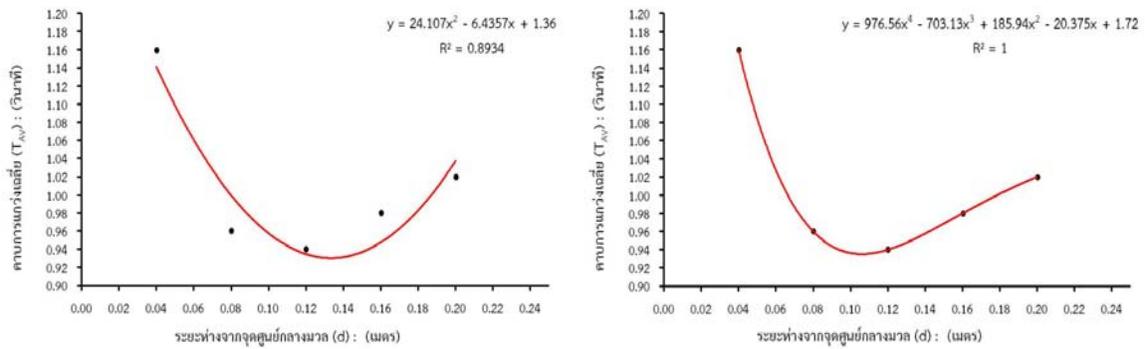
ค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ หรือ R square หรือ R² หมายถึงสัดส่วนที่ตัวแปร x สามารถอธิบายการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร y ได้ หรือเป็นตัวที่แสดงประสิทธิภาพของสมการนั่นเอง ค่า R² มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 1 และไม่มีหน่วย ถ้า R² มีค่าเข้าใกล้ 1 แสดงว่า สมการที่ได้มีประสิทธิภาพสูงเชื่อถือได้ ถ้าเข้าใกล้ 0 แสดงว่า สมการที่ได้มีประสิทธิภาพต่ำ



ภาพที่ 4 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างคาบเฉลี่ย (T_{AV}) กับ ระยะห่างจากจุดแขวน (d) ของการแกว่งแผ่นอะครีลิกรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยสร้างสมการเส้นแนวโน้ม พร้อมแสดงสมการพหุนามกำลังสองและกำลังสี่



ภาพที่ 5 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างคาบเฉลี่ย (T_{AV}) กับ ระยะห่างจากจุดแขนง (d) ของการแกว่งแผ่นอะครีลิก รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยสร้างสมการเส้นแนวโน้ม พร้อมแสดงสมการพหุนามกำลังสองและกำลังสี่



ภาพที่ 6 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างคาบเฉลี่ย (T_{AV}) กับ ระยะห่างจากจุดแขนง (d) ของการแกว่งแผ่นอะครีลิก รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยสร้างสมการเส้นแนวโน้ม พร้อมแสดงสมการพหุนามกำลังสองและกำลังสี่

เมื่อนำสมการของเส้นแนวโน้มมาทำการหาจุดวิกฤติ ด้วยการกำหนดให้หาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง มีค่าเท่ากับศูนย์ จะทำได้ค่าระยะห่างจากจุดศูนย์กลางที่ทำให้คาบการแกว่งต่ำสุด ดังข้อมูลในตารางที่ 2



ตารางที่ 2 แสดงสมการความสัมพันธ์ระหว่างคาบเวลาเฉลี่ยและระยะห่างจากตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวล พร้อมแสดงค่า d ทางทฤษฎี จากการศึกษาการหาค่าวิกฤติ

รูปทรงของแผ่นบาง	พหุนามที่ใช้	รูปสมการ	ค่า R^2	ระยะ d_T ที่ทำให้คาบต่ำสุดทางทฤษฎี (เมตร)	ระยะ d ที่ทำให้คาบต่ำสุดจากการทดลอง (เมตร)	ระยะ d_c ที่ทำให้คาบต่ำสุดจากค่าวิกฤติ
สี่เหลี่ยมผืนผ้า	กำลังสอง	$T = 24.352d^2 - 7.8292d + 1.6767$	0.9593	0.1443	0.135	0.161
	กำลังสี่	$T = 459.5d^4 - 399.22d^3 + 130.26d^2 - 18.004d + 1.9561$	1		(รูเจาะที่ 3)	0.139
สามเหลี่ยมมุมฉาก	กำลังสอง	$T = 14.286d^2 - 4.2857d + 1.302$	0.8805	0.1179	0.100	0.150
	กำลังสี่	$T = 733.33d^4 - 540d^3 + 150.17d^2 - 17.65d + 1.71$	1		(รูเจาะที่ 4)	0.117
สามเหลี่ยมหน้าจั่ว	กำลังสอง	$T = 24.107d^2 - 6.4357d + 1.36$	0.8934	0.1104	0.120	0.133
	กำลังสี่	$T = 976.56d^4 - 703.13d^3 + 185.94d^2 - 20.375d + 1.72$	1		(รูเจาะที่ 3)	0.106

และเมื่อนำแผ่นอะคริลิกมาเจาะเพิ่มที่ตำแหน่งที่ทำให้ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยที่มีค่าเป็นสองเท่า ซึ่งตามทฤษฎีจะเป็นตำแหน่งที่ให้คาบน้อยสุด แล้วทำการแกว่งที่ตำแหน่งดังกล่าว จำนวน 20 รอบ 5 ครั้ง และหาคาบเวลาต่ำสุดทางทฤษฎี ดังข้อมูลในตารางที่ 3



ตารางที่ 3 แสดงคาบเวลาเฉลี่ยที่เกิดจากการแกว่งที่ตำแหน่งที่ทำให้ไม่เกิดความเฉื่อยมีค่าเป็นสองเท่าของโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวล เทียบกับคาบเวลาเฉลี่ยที่เกิดจากการแกว่งค้ำวิกฤตลงในสมการพหุนาม

รูปทรง	ระยะ d_T (เมตร)	ครั้งที่ (รอบ)	จำนวนรอบ	เวลา (วินาที)	คาบ (วินาที)	คาบเฉลี่ย $[T_{MIN-THEORY}]$ (วินาที)	ระยะ d_c (เมตร)	สมการความสัมพันธ์ของ T_{AV} กับ d_c	คาบเฉลี่ย $[T_{MIN-CRISIS}]$ (วินาที)	ความแตกต่าง ระหว่าง $[T_{MIN-CRISIS}]$ กับ $[T_{MIN-THEORY}]$ (วินาที)
สี่เหลี่ยม ผืนผ้า		1	20	21.39	1.070					
		2	20	21.36	1.068		$T = 459.5d^4 - 399.22d^3 +$			0.0011 (0.103%)
	0.1443	3	20	21.33	1.066	1.068	0.139	$130.26d^2 - 18.004d +$ 1.9561	1.0690	
		4	20	21.36	1.068					
		5	20	21.35	1.068					
สามเหลี่ยม มุมฉาก		1	20	19.67	0.9835					
		2	20	19.64	0.9820					
	0.1179	3	20	19.70	0.9850	0.9834	0.117	$T = 733.33d^4 - 540d^3 +$ $150.17d^2 - 17.65d + 1.71$	0.9810	0.0024 (0.244%)
		4	20	19.70	0.9850					
		5	20	19.63	0.9815					
สามเหลี่ยม หน้าจั่ว		1	20	18.71	0.9355					
		2	20	18.72	0.9360					
	0.1104	3	20	18.71	0.9355	0.9362	0.106	$T = 976.56d^4 - 703.13d^3 +$ $185.94d^2 - 20.375d + 1.72$	0.9350	0.0012 (0.128%)
		4	20	18.75	0.9375					
		5	20	18.73	0.9365					



สรุปผลการวิจัย

การวิจัยในครั้งนี้ให้ผลตามวัตถุประสงค์ของการวิจัย คิดเป็นอัตราร้อยละ 100 โดยมีรายละเอียดดังนี้

1. ชุดทดลองฟิสิกส์เพนดูลัมรูปเรขาคณิตแบบแผ่นบางสามารถหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยได้ผลอย่างยอดเยี่ยม และเมื่อเทียบกับค่าที่ได้จากการทดลองและค่าที่คำนวณได้ในทางทฤษฎี มีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี

2. ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนตั้งฉากกับระนาบของแผ่นวัตถุที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล ($I_{Z_{CM}}$) โดยค่าที่ได้จากการทดลองมีความสอดคล้องกับค่า $I_{Z_{CM}}$ ที่คำนวณทางทฤษฎี โดยมีความคลาดเคลื่อนต่ำกว่าร้อยละ 5 ทุกวัตถุที่ศึกษา

3. ตำแหน่งที่ทำให้คาบของการแกว่งมีค่าน้อยที่สุดพบว่คาบเวลาเฉลี่ยที่น้อยที่สุดที่เกิดจากผลของการแกว่งในการทดลองกับผลการคำนวณทางทฤษฎีมีความสอดคล้องกันอย่างมาก โดยค่าทั้งสองมีความแตกต่างกันในระดับมิลลิวินาทีเท่านั้น ซึ่งพบว่าเป็นตำแหน่งที่โมเมนต์ความเฉื่อย มีค่าเป็นสองเท่าของโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวล

นอกจากนี้แล้ว งานวิจัยครั้งนี้ยังมีประโยชน์ต่อการศึกษาในระดับมัธยมศึกษา และระดับอุดมศึกษาซึ่งมีงบประมาณในการซื้อเครื่องมือทดลองในระดับสูงที่จำกัด ถึงแม้ว่าการทดลองสามารถทำได้ในช่วงเวลาเรียนของนักเรียน แต่เวลานักเรียนยังมีความจำเป็นที่จะต้องใช้เวลาวิเคราะห์ผล ช่วงเวลาที่เหมาะสมควรอยู่ประมาณ 2 ครั้งของชั่วโมงเรียน

ข้อเสนอแนะ

1. การใช้อุปกรณ์จับเวลาเนื่องจากการทดลองที่ต้องการให้อุปกรณ์การทดลองสามารถหาได้ง่ายจากท้องถิ่น จึงเลือกใช้นาฬิกาจับเวลา ซึ่งการจับเวลาอาจให้ความคลาดเคลื่อนอย่างสุ่มเนื่องจากผู้จับเวลาต้องใช้สายตาในการคาดคะเน เมื่อลูกตุ้มฟิสิกส์เคลื่อนที่ครบรอบตามจำนวนที่ต้องการ ซึ่งเวลาอาจมีผลคลาดเคลื่อน + 0.05 ถึง 0.15 วินาที ในการที่สมองสังการให้นี้วกดหยุดเวลา ผู้วิจัยจึงเสนอว่าหากปรับเปลี่ยนอุปกรณ์จากเครื่องจับเวลาให้เป็นอุปกรณ์ที่มีมาตรฐานมากขึ้นและลดการทำงานของมนุษย์ เช่น เซนเซอร์ และโฟโตเกต จะให้ผลการทดลองที่แม่นยำมากขึ้น

2. รูที่ใช้แขวนวัตถุที่ถูกเจาะขึ้นควรมีขนาดพอดีกับวัตถุที่ใช้เป็นแกนสำหรับแขวน เพราะหากรูมีขนาดใหญ่กว่าแกนที่ใช้สำหรับแขวนหลายๆ จะทำให้แผ่นวัตถุเกิดการส่ายไปด้านหลังและหลัง ซึ่งเป็นการเคลื่อนที่ที่ไม่อยู่ในระนาบเดียวและถือว่าไม่เป็นการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย โดยผู้วิจัยได้ทดสอบกับขาตั้งหลายประเภท และพบว่าการใช้ขาตั้งที่มีแผ่นอะคริลิกใสและมีสเกลกำกับ เป็นอุปกรณ์ที่เหมาะสมที่สุด เนื่องจากทราบมุมในการแกว่งที่ชัดเจน และไม่มีลมมารบกวนสังเกตและนับคาบการแกว่งได้ง่าย

เอกสารอ้างอิง

- กระทรวงศึกษาธิการ. (2552). **หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551**. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย
- Cutnell, J.D. & Johnson, K.W. (2005). **Physics**. Hoboken, NJ : John Wiley & Sons.
- Russeva, G.B., Tsutsumanova, G.G. and Russev, S.C. (2010) **An experiment on a physical Pendulum and Steiner's Theorem**. Physics Education, January 2010, pp.59-62.
- Stroud, K.A. and Matthews, J.C. (1987). **Period of a rigid pendulum pivoting on flattened knife edges**. Physics Education, 22, 170.