



การหาผลเฉลยของระบบสมการไม่เชิงเส้น สำหรับฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร
โดยใช้วิธีการค้นแบบสุ่มหลายจุด

Solution of Nonlinear Equation System for One Variable function using
Multi-point Random Search (MPRS)

ชวนพิศ มังคละ

Chuanpit Mungkala

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี จังหวัดจันทบุรี 22000

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Rambhai Barni Rajabhat University,
Chanthaburi 22000 Thailand

Corresponding author E-mail: Chuanpit.t@rbru.ac.th

(Received: January 7, 2019; Revised : June 24, 2019; Accepted: July 19, 2019)

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้เป็นการศึกษาเพื่อหาผลเฉลยของระบบสมการไม่เชิงเส้น สำหรับฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรโดยใช้การค้นแบบสุ่มหลายจุด ซึ่งมีองค์ประกอบหลัก คือ จุดเริ่มต้นแบบสุ่มทิศทางของจุดที่ค้น และระยะกระโดด ซึ่งได้ทดลองกับฟังก์ชันทดสอบ 7 ฟังก์ชัน และได้ทำการเปรียบเทียบการหาผลเฉลยของวิธีการค้นแบบสุ่มหลายจุด (Multi-point Random Search : MPRS) กับระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง (Bisection Method) จากการศึกษาพบว่า ประสิทธิภาพของวิธีการค้นแบบสุ่มหลายจุด สามารถหาผลเฉลยได้เร็วขึ้น (Global optimization solution speed) และแม่นยำเมื่อใช้การคำนวณฟังก์ชันเป็นตัวชี้วัด

คำสำคัญ : ระบบสมการไม่เชิงเส้น, การหาค่าเหมาะสม, วิธีการค้นแบบสุ่มหลายจุด

Abstract

This research studied Solution of Nonlinear Equation System for one variable function using Multi-point Random Search (MPRS) consisted of random start point, a search direction and step size. In which this method was performed by using 7 selected test functions and compare the solutions Multi-point Random Search with Bisection Method. The study found that the method have been expected to increases the speed and efficiency of MPRS, when use the number of function evolutions as an iteration.

Keywords : Nonlinear Equations System, Optimization, Multi-point Random Search

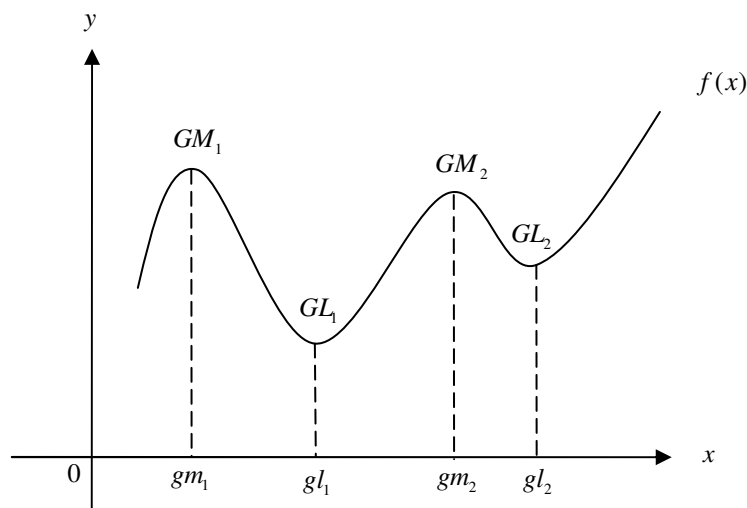


บทนำ

การวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical Analysis) เป็นการนำเอาวิธีการทางคณิตศาสตร์มาวิเคราะห์ เพื่อพัฒนาและแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์ โดยการวิเคราะห์เชิงตัวเลขนั้นจะต้องประกอบด้วยตัวแบบทางคณิตศาสตร์ แต่แบบที่นำไปใช้ในการวางแผนและตัดสินใจอย่างเป็นระบบและมีขั้นตอนสามารถที่จะหาผลเฉลยที่แม่นยำได้อย่างไรก็ตามปัญหาที่เกิดขึ้นส่วนใหญ่ในชีวิตประจำวันจะมีความยุ่งยากและซับซ้อน ซึ่งการหาผลเฉลยแม่นยำทางทฤษฎีนั้นทำได้ยาก ดังนั้นจึงมีความพยายามในการพัฒนาการหาผลเฉลยแบบต่างๆ เพื่อนำไปใช้ประกอบการตัดสินใจ ดังนั้นปัญหาเหล่านี้สามารถกำหนดเป็นสมการรูปแบบปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุด

(Optimization Problem) ซึ่งอยู่ในรูปของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (Objective Function) ภายใต้เงื่อนไขหรือข้อบังคับ (Constraint)

การหาค่าเหมาะสมที่สุด (Optimization) หมายถึง กระบวนการที่ดีที่สุดให้กับปัญหาต่างๆ การหาค่าเหมาะสมที่สุดของฟังก์ชันในทางคณิตศาสตร์นั้นจะหมายถึงการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน ซึ่งค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชันในที่นี้คือ ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (relative maximum) หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative minimum) โดยค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันคือ ค่าสูงสุดของจุดที่ได้ถูกพิจารณาว่าสูงกว่าจุดอื่นที่อยู่ข้างเคียง และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันคือ ค่าต่ำสุดของจุดที่ได้ถูกพิจารณาว่าต่ำกว่าจุดอื่นที่อยู่ข้างเคียง ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ทั้งสองเรียกว่า ค่าขีดสุดสัมพัทธ์ ซึ่งแสดงได้ดังภาพที่ 1



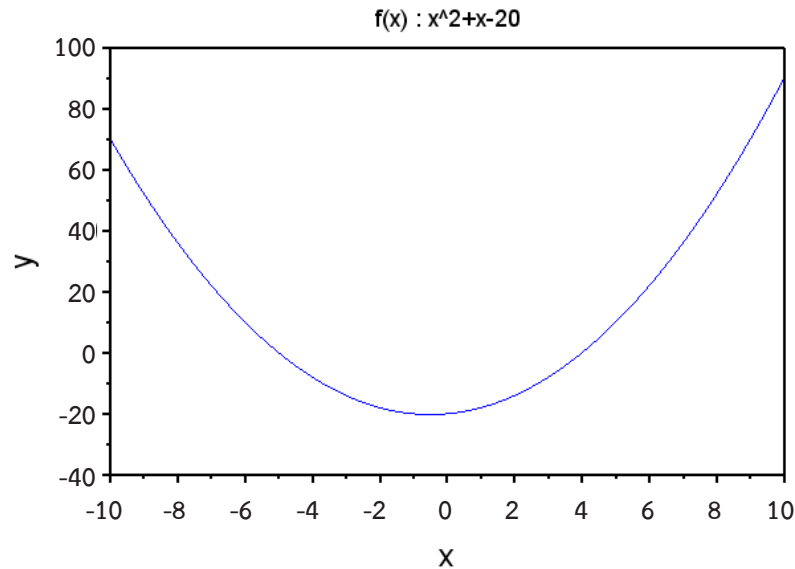
ภาพที่ 1 กราฟแสดงค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$

จากภาพที่ 1 จุด GM_1 และ GM_2 คือ จุดที่ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ สำหรับจุด GL_1 และ GL_2 คือ จุดที่ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน ทั้งนี้ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันอาจมีหลายค่า โดยค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่เป็นจุดสูงสุดที่สุดของฟังก์ชันในโดเมนที่พิจารณาจะเรียกว่า ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ (Absolute maximum) หรือค่าสูงสุดวงกว้าง (Global maximum) ในขณะที่ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่เป็นจุดต่ำที่สุดของฟังก์ชันในโดเมนที่พิจารณาจะเรียกว่า ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ (Absolute minimum) หรือค่าต่ำสุดวงกว้าง (Global minimum) และจากภาพที่ 2 เมื่อพิจารณาบนช่วง $[gm_1, gl_2]$ จุด GM_1 และจุด GL_1 คือ จุดที่ให้ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ตามลำดับ

ในการหาผลเฉลยด้วยวิธีการค้นแบบสุ่มหลายจุด เป็นวิธีการค้นหาโดยตรง (Direct search method) ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้ค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ในการหาค่าเหมาะสมที่สุด เช่น วิธีการค้นแบบสุ่ม (Random search) ขั้นตอนวิธีเชิงพันธุกรรม (Genetic Algorithm) วิวัฒนาการเชิงผลต่าง (Differential Evolution) วิธีการประมาณค่าในช่วงด้วยพหุนามกำลังสอง (Successive quadratic interpolation method) และวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection Method) เป็นต้น

กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันวัตถุประสงค์ เรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันตัวแปรเดียว (One Variable Functions)

เช่น $f(x) = x^2 + x - 20$ โดยที่ $x \in$ ดังภาพที่ 2

ภาพที่ 2 กราฟแสดงฟังก์ชัน $f(x) = x^2 + x - 20$

วิธีการค้นแบบสุ่มที่ใช้จุดค้นเพียงจุดเดียวจะค้นได้ไม่ครอบคลุมเพราะมีจุดต่ำสุดหรือจุดสูงสุดเฉพาะที่หลายจุด ดังนั้นเราจึงใช้จุดค้นหลายจุดหรือการค้นเชิงประชากร (population based search) เพื่อให้สามารถค้นคำตอบได้ทั่วถึง และสามารถหาคำตอบที่เหมาะสมที่สุด

Sheela ได้นำเสนอวิธีการค้นแบบสุ่มที่มีระยะกระโดดที่เหมาะสม (Optimized step-size random search) ซึ่งใช้จุดค้นเพียงจุดเดียว ใช้ทิศทางแบบสุ่มและใช้ระยะกระโดดของการค้นจากการประมาณค่าด้วยพหุนามกำลังสอง และได้ทดสอบกับฟังก์ชันอย่างง่ายที่มีตัวแปร 2 ถึง 4 ตัว

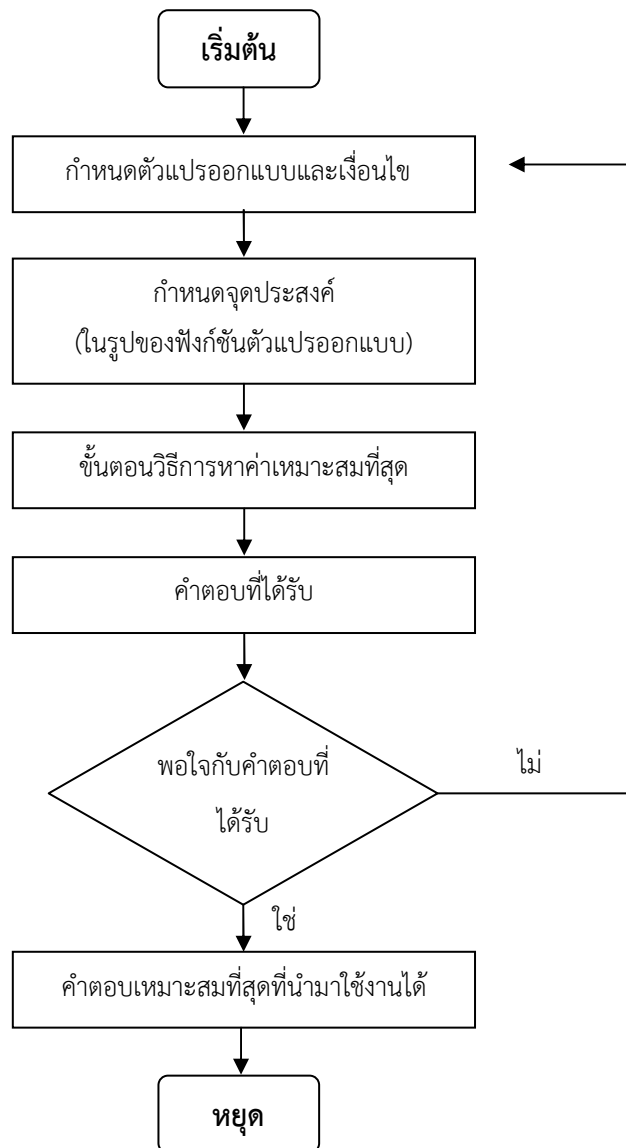
Raphael และ Smith ได้นำเสนอเทคนิคการค้นหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุดซึ่งใช้ทฤษฎีที่เรียกว่า ทฤษฎีความน่าจะเป็นโลซานน์ (Probabilistic Global Search Lausanne)

Montaz Ali, AimoTorn และ Sami Viitanen ได้นำเสนอการปรับปรุงวิธีการค้นแบบสุ่มโดยใช้สมการกำลัง และ β -distribution sampling

Francisco, Solis และ Roger ได้นำเสนอเทคนิคการหาค่าต่ำสุดโดยใช้วิธีการค้นแบบสุ่มซึ่งเป็นวิธีที่ไม่ใช้อนุพันธ์ในการหาคำตอบ

Daniel และ Marthaler ได้นำเสนอวิธีการทางคณิตศาสตร์สำหรับการหาค่าเหมาะสมทางตัวเลข โดยหาผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้น โดยใช้อนุพันธ์ในการหาคำตอบ

การดำเนินการหาค่าเหมาะสมที่สุดนั้น จะต้องเริ่มจากการพิจารณาและทำความเข้าใจปัญหาเสียก่อน ซึ่งเป็นการศึกษาเพื่อให้ได้มาซึ่งแบบจำลองของระบบนั่นเอง เมื่อจุดประสงค์ของปัญหาถูกกำหนดขึ้น การตั้งโจทย์ปัญหาที่เหมาะสมที่สุดก็จะเริ่มขึ้น ซึ่งรายละเอียดการดำเนินการหาค่าเหมาะสมที่สุดจะถูกอธิบายโดยผังงาน ดังภาพที่ 3



ภาพที่ 3 แสดงผังงานการดำเนินการหาค่าเหมาะสมที่สุด

ในการดำเนินการหาค่าเหมาะสมที่สุดนั้นจะต้องมีการกำหนดตัวแปรออกแบบขึ้นมา ซึ่งตัวแปรออกแบบ (Design variable) คือ ตัวแปรที่ใช้ในการปรับเปลี่ยนหรือควบคุมในขั้นตอนการหาค่าเหมาะสมที่สุด ถ้าออกแบบตัวแปรให้เหมาะสมก็จะทำให้เกิดประสิทธิภาพเพิ่มขึ้นในการหาคำตอบของการดำเนินการหาค่าเหมาะสมที่สุด

การสร้างแบบจำลองปัญหาเพื่อหาผลเฉลยที่ดีที่สุด สิ่งสำคัญของการแก้ปัญหาคือการหาคำตอบที่ดีที่สุดที่แท้จริง (Global Optimum) ของปัญหานั้นๆ การแก้ปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดมีทั้งแบบวัตถุประสงค์เดียว (Single Objective Optimization Problem) และแบบหลายวัตถุประสงค์ (Multi-Objective Optimization Problem) ซึ่งในงานวิจัยนี้ขอศึกษาฟังก์ชันวัตถุประสงค์เดียวหรือฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร

การหาค่าเหมาะสมที่สุดของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร

ฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรนั้นแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต้นหนึ่งตัวแปร (Dependent variable) กับตัวแปรตาม (Independent variable) โดยสามารถเขียนได้ในรูป $y = f(x)$ โดยที่ x เป็นตัวแปรต้น และ y เป็นตัวแปรตาม

โดยที่ x คือ ตัวแปรออกแบบ

$f(x)$ คือ ฟังก์ชันจุดประสงค์ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปร x



ตัวแปรออกแบบ

ในการดำเนินการหาค่าเหมาะสมที่สุดนั้นจะต้องมีการกำหนดตัวแปรออกแบบขึ้นมาซึ่งตัวแปรออกแบบ (Design variable) คือตัวแปรที่ใช้ในการปรับเปลี่ยนหรือควบคุม ในขั้นตอนการหาค่าเหมาะสมที่สุด แล้วทำให้เป้าหมายหรือจุดประสงค์เปลี่ยนแปลงได้ และถ้าจำนวนรอบของตัวแปรออกแบบที่เหมาะสมก็จะช่วยเพิ่มความรวดเร็วและประสิทธิภาพในการหาคำตอบในการดำเนินการหาค่าเหมาะสมที่สุด

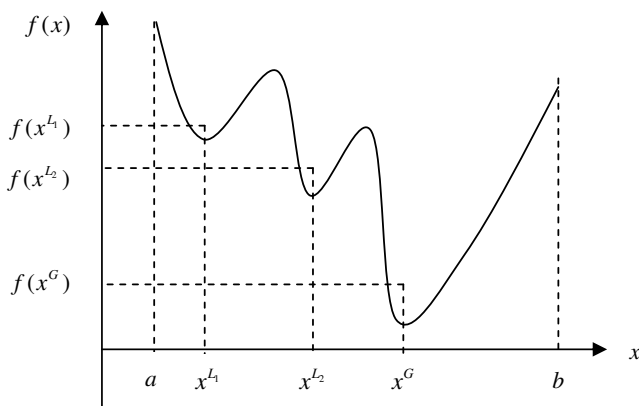
เงื่อนไขบังคับ

ในการกำหนดเงื่อนไขบังคับ (Constraints) หมายถึงสมการ หรือสมการที่แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ของตัวแปรขอบเขต และสมบัติตามข้อกำหนด

จุดที่เหมาะสมที่สุด

ในระเบียบวิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุดนั้น เป็นส่วนที่มีความสำคัญและมีความเกี่ยวข้องโดยตรง เพราะการที่จะได้ค่าเหมาะสมที่สุดนั้นเราต้องได้จุดที่เหมาะสมที่สุดก่อนเพื่อนำไปใช้ในการคำนวณ โดยทั่วไปแล้วจุดเหมาะสมที่สุดสามารถกำหนดได้ดังนี้

พิจารณาโดเมนของตัวแปร x โดยที่ x^L และ x^G เป็นจุดในโดเมน จุด x^L จะถูกเรียกว่าจุดเหมาะสมเฉพาะที่ (Local Optimum) ถ้าไม่มีจุดใดในย่านใกล้เคียงที่ดีกว่าจุด x^L ขณะที่จุด x^G จะถูกกล่าวว่า เป็นจุดที่เหมาะสมที่สุดวงกว้าง (Global Optimum) ดังภาพที่ 4



ภาพที่ 4 แสดงจุดเหมาะสมเฉพาะที่ และจุดที่เหมาะสมที่สุดวงกว้าง

ระบบสมการไม่เชิงเส้น (Nonlinear equations system)

สมการเชิงเส้น คือ สมการที่มีความสัมพันธ์กับเส้นตรง ที่อยู่ในรูป $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + c = 0$ โดยที่ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ คือ จำนวนตัวแปร และ $a_1, a_2, \dots, a_n$ คือค่าคงที่ และ c คือค่าคงที่หรือจุดตัดบนแกน y เมื่อ พิจารณาสมการตัวแปรเดียว เขียนความสัมพันธ์ได้เป็น $y = mx + c$ โดยที่ m คือความชันที่ไม่เท่ากับ 0 การหาค่าราก $y = f(x)$ คือการหาค่าของ x ที่สอดคล้องกับสมการ $f(x) = 0$ โดยที่คำตอบของสมการจะมีคำตอบเดียว เมื่อ $x = -\frac{c}{m}$ โดยที่ $m \neq 0$ ซึ่งมีตัวแปร x และ y เป็นตัวแปรที่มีกำลังไม่เกิน 1 หากตัวแปรทั้งสองตัวใดตัวหนึ่งมีกำลังเกิน 1 ความสัมพันธ์จะไม่เชิงเส้น

ในการทำงานกันฟังก์ชันบางฟังก์ชันไม่สามารถหาค่ารากได้ด้วยวิธีวิเคราะห์หรืออาจจะหาค่ารากได้แต่ถ้าระบบของสมการมีความยุ่งยากและซับซ้อน ในการหาผลเฉลยสำหรับฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรหรือหลายตัวแปรการหารากของสมการ $f(x) = 0$ เช่น ฟังก์ชันกำลังสอง $x^2 + 1 = 0$ พบว่า สมการไม่มีคำตอบ ทั้งนี้เราจึงประยุกต์แนวความคิดวิธีการค้นแบบสุ่มหลายจุด เพื่อประมาณค่ารากของสมการ แม้ว่าวิธีเชิงตัวเลขจะไม่ได้ให้ค่ารากที่แท้จริงแต่เราก็สามารถได้ค่าที่ใกล้เคียงมากที่สุด โดยค่าที่ได้ขึ้นอยู่กับความคลาดเคลื่อนของปัญหา

ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง (Bisection Method)

ทฤษฎีบท ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และ แล้วสมการ มีรากจริงอย่างน้อยหนึ่งรากในช่วง

ขั้นตอนระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง

ขั้นตอนที่ 1 : สุ่มเลือกช่วง $[a, b]$ ที่บรรจุรากของฟังก์ชัน $f(x)$

ขั้นตอนที่ 2 : ให้ c เป็นจุดกึ่งกลางของช่วง $[a, b]$

$$\text{นั่นคือ } c = \frac{a + b}{2}$$

ขั้นตอนที่ 3 : ตรวจสอบค่ารากที่ยอมรับได้และหยุด

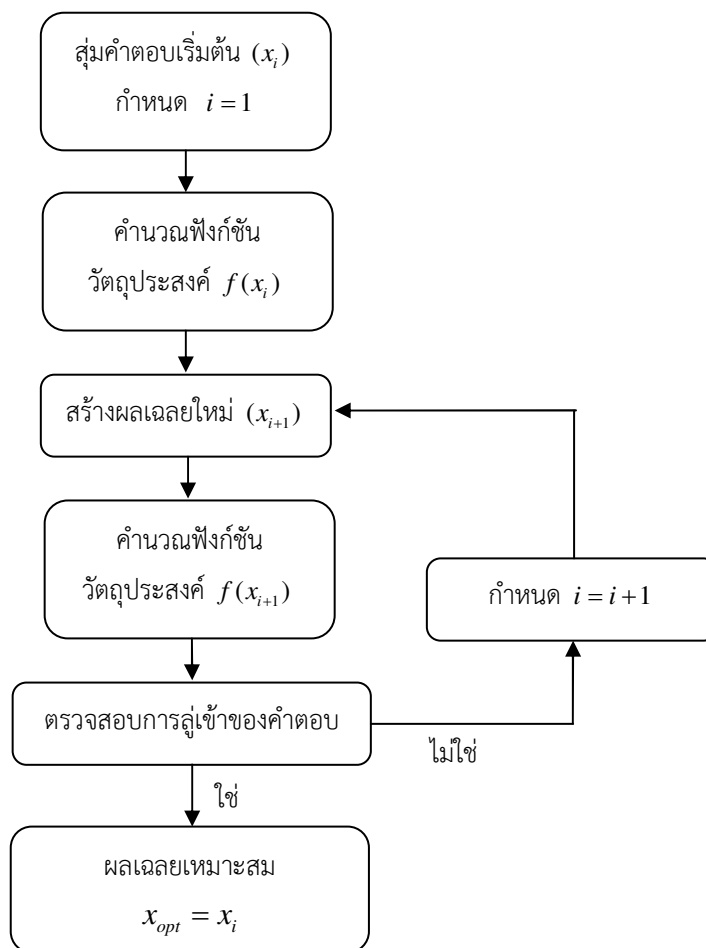
ขั้นตอนที่ 4 : แบ่งครึ่งช่วงที่บรรจุรากใหม่ และกลับไปทำซ้ำขั้นตอนที่ 1



วิธีการค้นแบบสุ่ม (Random Search Method)

วิธีการค้นแบบสุ่ม คือ เป็นวิธีการหาค่าคำตอบที่ดีที่สุด (Optimisation Algorithms) สามารถแบ่งออกเป็น 2 แบบคือ วิธีการหาค่าคำตอบที่ดีที่สุดโดยอาศัยหลักการทางคณิตศาสตร์ (Conventional Optimisation Algorithm) วิธีการนี้จะแก้ปัญหาอยู่บนพื้นฐานทางคณิตศาสตร์เป็นหลักจะได้คำตอบที่ดีที่สุด

ออกมา แต่เมื่อปัญหามีตัวแปรที่มากขึ้นหรือมีขนาดใหญ่ขึ้นจะทำให้ใช้ระยะเวลานาน ในการค้นหาคำตอบ และวิธีการหาค่าคำตอบที่ดีที่สุดโดยอาศัยหลักการประมาณค่า (Approximation Optimisation Algorithms) วิธีการนี้จะได้คำตอบที่เหมาะสมหรือใกล้เคียงกับคำตอบที่หาจากหลักการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งสามารถยอมรับได้ วิธีการนี้จะใช้ในการค้นหาคำตอบที่มีความซับซ้อน ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้



ภาพที่ 5 แสดงแผนผังวิธีการค้นแบบสุ่ม (Random Search Method)

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาและพัฒนาการหารากของสมการทางทวิเคราะห์เชิงตัวเลข
2. เพื่อทดสอบประสิทธิภาพของวิธีการค้นแบบสุ่มหลายจุด สำหรับการหาผลเฉลยของระบบสมการไม่เชิงเส้น สำหรับฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร

วิธีดำเนินการวิจัย

งานวิจัยนี้จะนำแนวคิดของวิธีการค้นแบบสุ่มหลายจุดมาใช้เพื่อหาผลเฉลยของระบบสมการไม่เชิงเส้น สำหรับฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร ดังนั้นจะกล่าวถึงขั้นตอนดังกล่าวโดยละเอียดดังนี้

วิธีการค้นแบบสุ่มหลายจุด (Multi-point Random Search)

วิธีการค้นแบบสุ่มหลายจุดเป็นวิธีการสุ่มที่หาค่าเหมาะสมที่สุดที่ไม่ใช้อนุพันธ์ในการหาคำตอบ ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้



ขั้นตอนที่ 1 : กำหนดฟังก์ชันวัตถุประสงค์ $f(x) = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ เมื่อ $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ กำหนดจำนวนการเรียกใช้ฟังก์ชันสูงสุด (NFMAX)

ขั้นตอนที่ 2 : สร้างตัวแปรออกแบบเริ่มต้นแบบสุ่ม

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2N} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \dots & x_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{NP1} & x_{NP2} & x_{NP3} & \dots & x_{NPN} \end{bmatrix}$$

กำหนดให้ x^* เมื่อ $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_n^*)$ โดยที่ $x^* \in [L, U]$ กำหนดให้ $xb = x^*$ เป็นจุดที่ให้ค่าต่ำสุดและให้ $fb = f(x^*)$ เป็นค่าฟังก์ชันต่ำสุด ณ ขณะนั้น

ขั้นตอนที่ 3 : สุ่มเวกเตอร์ทิศทางขนาดหนึ่งหน่วย V และสร้างเวกเตอร์ W โดย $W = x^* + SV$ เมื่อ S คือ ระยะกระโดด (Step size)

ขั้นตอนที่ 4 : เปรียบเทียบค่า $f(W)$ กับ $f(x^*)$ และ $f(W)$ กับ $f(xb)$

ถ้า $f(W) < f(x^*)$ ให้ $x^* = W$,

$f(x^*) = f(W)$

ถ้า $f(W) < f(xb)$ ให้ $xb = W$,

$f(xb) = f(W)$

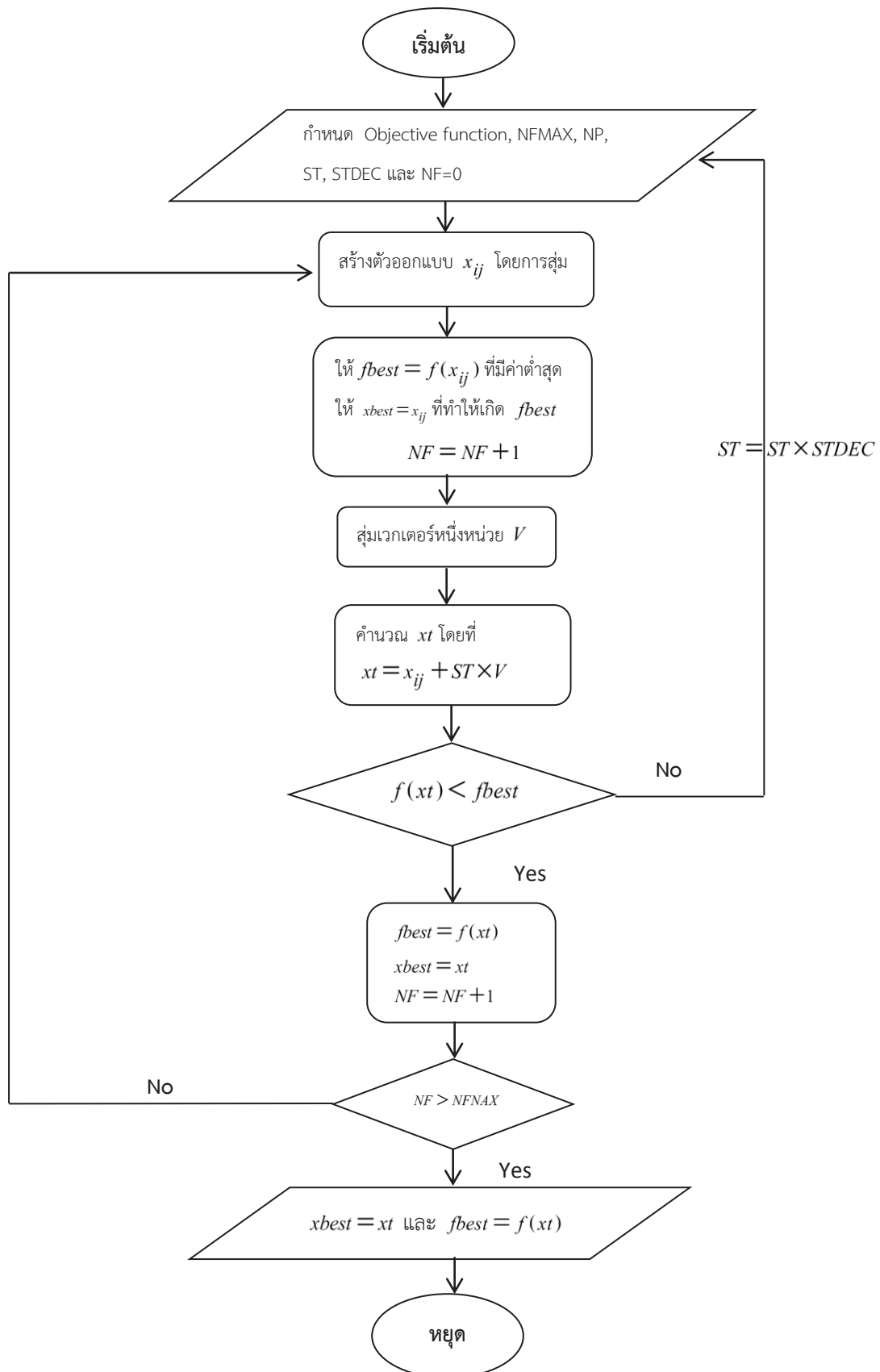
ถ้าไม่พบจุดที่ดีขึ้นในแต่ละรุ่นของประชากรให้ลดระยะกระโดด (s)

ขั้นตอนที่ 5 : ถ้าจำนวนการเรียกใช้ฟังก์ชันน้อยกว่าหรือเท่ากับ NFMAX ให้ทำซ้ำขั้นตอนที่ 3-4 แต่ถ้ามากกว่า NFMAX ให้หยุดดำเนินการจะได้จุดที่ให้ค่าต่ำสุด xb ซึ่งให้ค่าต่ำสุด fb

ซึ่งในงานวิจัยนี้จะเสนอการปรับปรุงวิธีการค้นแบบสุ่มหลายการหาผลเฉลยของระบบสมการไม่เชิงเส้น สำหรับฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร ซึ่งเป็นอีกวิธีหนึ่งที่ใช้แก้ปัญหาของฟังก์ชันที่มีจุดต่ำสุดเฉพาะที่หรือจุดสูงสุดเฉพาะที่หลายจุดที่สามารถค้นคำตอบได้ครอบคลุมซึ่งมีขั้นตอนอย่างละเอียด และมีแผนผังอัลกอริทึม (Flowchart Algorithm) ประกอบความเข้าใจดังนี้



แผนผังอัลกอริทึม วิธีการค้นแบบสุ่มหลายจุด



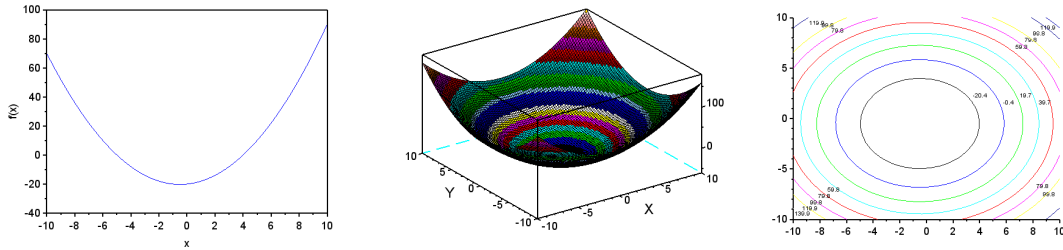
ภาพที่ 6 แสดงวิธีการค้นแบบสุ่มหลายจุด



รูปแบบปัญหาที่ใช้สำหรับฟังก์ชันทดสอบ

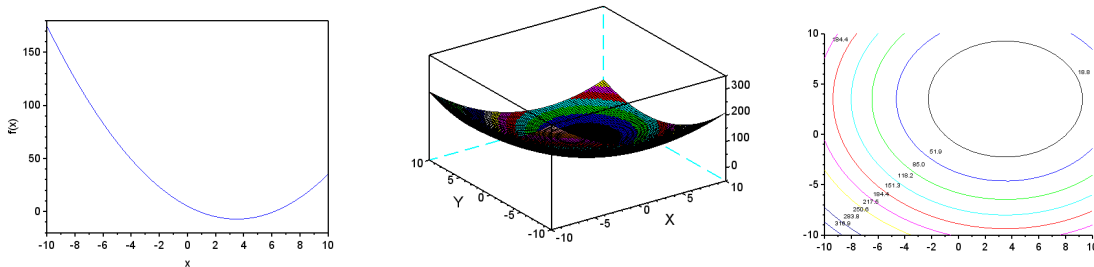
รูปแบบของปัญหาที่ใช้ทดสอบประกอบด้วยปัญหาค่าขอบเขต จำนวน 7 ฟังก์ชันทดสอบ ดังนี้

1. $f_1(x) = x^2 + x - 20$ โดยที่ $x \in [-10, 10]$



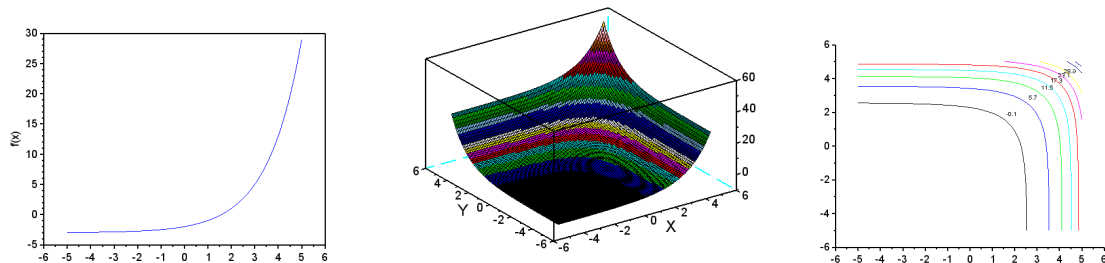
ภาพที่ 7 แสดงกราฟ Two & Three Dimensions และ contour สำหรับฟังก์ชัน

2. $f_2(x) = x^2 - 7x + 5$ โดยที่ $x \in [-10, 10]$



ภาพที่ 8 แสดงกราฟ Two & Three Dimensions และ contour สำหรับฟังก์ชัน

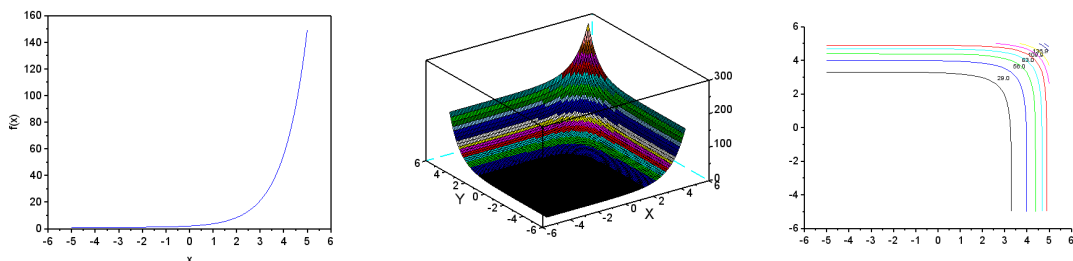
3. $f_3(x) = 2^x - 3$ โดยที่ $x_i \in [-5, 5]$



ภาพที่ 9 แสดงกราฟ Two & Three Dimensions และ contour สำหรับฟังก์ชัน

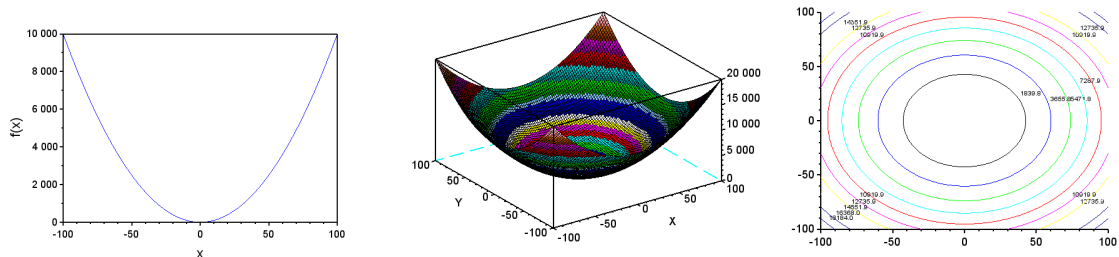


4. $f_4(x) = e^x + 1$ โดยที่ $x \in [-5, 5]$



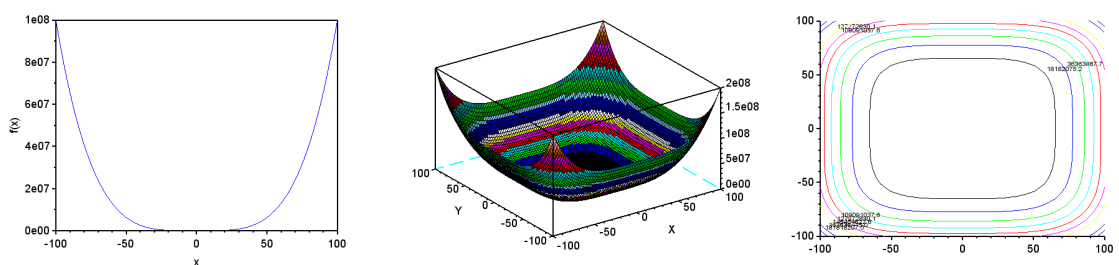
ภาพที่ 10 แสดงกราฟ Two & Three Dimensions และ contour สำหรับฟังก์ชัน

5. $f_5(x) = \sum_{i=1}^N x_i^2$ โดยที่ $x \in [-100, 100]$



ภาพที่ 11 แสดงกราฟ Two & Three Dimensions และ contour สำหรับฟังก์ชัน

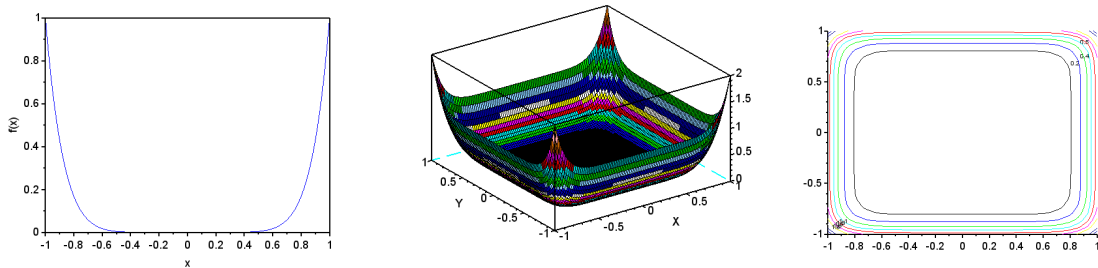
6. $f_6(x) = \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^2$ โดยที่ $x \in [-100, 100]$



ภาพที่ 12 แสดงกราฟ Two & Three Dimensions และ contour สำหรับฟังก์ชัน



$$7. f_7(x) = \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^\alpha \text{ เมื่อ } \alpha = 3 \text{ โดยที่ } x \in [-1, 1]$$



ภาพที่ 13 แสดงกราฟ Two & Three Dimensions และ contour สำหรับฟังก์ชัน

ผลการวิจัย

ผลการคำนวณเพื่อหาค่าเหมาะสมที่สุดของแต่ละฟังก์ชันทดสอบ ด้วยวิธีการค้นแบบสุ่มหลายจุด (Multi-point Random Search: MPRS) โดยเปรียบเทียบผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดกับระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection Method) ดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 แสดงผลการคำนวณ MPRS และ Bisection Method กับฟังก์ชันทดสอบ $f_1 - f_7$

Function Test	Solution		Iteration		Error	
	MPRS	Bisection	MPRS	Bisection	MPRS	Bisection
$f_1(x) = x^2 + x - 20$	4	3.99982	4	14	10^{-6}	10^{-5}
$f_2(x) = x^2 - 7x + 5$	6.19202	6.19629	2	10	10^{-5}	10^{-4}
$f_3(x) = 2^x - 3$	1.58496	1.58496	3	12	10^{-6}	10^{-6}
$f_4(x) = e^x + 1$	Solution Diverges	Solution Diverges	-	-	-	-
$f_5(x) = \sum_{i=1}^N x_i^2$	3.05D-15	Solution Diverges	14	-	10^{-12}	-
$f_6(x) = \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^2$	4.22D-12	Solution Diverges	10	-	10^{-10}	-
$f_7(x) = \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^\alpha$	2.29D-9	Solution Diverges	1	-	10^{-8}	-



สรุปและอภิปรายผลการวิจัย

งานวิจัยนี้ได้นำเสนอการหาผลเฉลยของระบบสมการไม่เชิงเส้น สำหรับฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร โดยใช้การค้นแบบสุ่มหลายจุด ซึ่งเป็นวิธีที่ไม่ใช้อนุพันธ์ในการหาคำตอบ จากผลการทดลองได้นำวิธีการค้นแบบสุ่มหลายจุด ไปทดสอบการแก้ปัญหาของระบบสมการไม่เชิงเส้น กับฟังก์ชันทดสอบ 7 ฟังก์ชัน $f_1 - f_7$ จากตารางที่ 1 ได้แสดงค่าผลเฉลย Solution การทำซ้ำ Iteration และค่า Error ในการหาคำตอบสำหรับวิธี Multi-point Random Search: MPRS จากการทดลองพบว่ามีค่าการลู่เข้าสู่คำตอบทั้งหมด 6 ฟังก์ชัน คือ $f_1, f_2, f_3, f_5, f_6, f_7$ เมื่อพิจารณาความแม่นยำของการทำซ้ำ และ f_4 , พบว่า คำตอบของผลเฉลยลู่ออก และ Bisection Method จากการทดลองพบว่ามีค่าการลู่เข้าสู่คำตอบทั้งหมด 3 ฟังก์ชัน คือ f_1, f_2, f_3 เมื่อพิจารณาความแม่นยำของการทำซ้ำ และ f_4, f_5, f_6, f_7 พบว่า คำตอบของผลเฉลยลู่ออก

จากผลการวิจัยพบว่า วิธีการค้นแบบสุ่มหลายจุดมีประสิทธิภาพในการค้นหาคำตอบสำหรับระบบสมการไม่เชิงเส้นเส้นที่ใช้ฟังก์ชันทดสอบ 7 ฟังก์ชัน พบว่า สามารถลู่เข้าสู่คำตอบทั้งหมด 6 ฟังก์ชัน ซึ่งสะท้อนคุณสมบัติของฟังก์ชันที่มีจุดต่ำสุดเฉพาะที่หรือจุดสูงสุดเฉพาะที่หลายจุด ซึ่งจุดเหล่านี้อาจจะอยู่ใกล้หรือไกลกัน ดังนั้นการหาคำตอบจึงขึ้นอยู่กับฟังก์ชันวัตถุประสงค์ซึ่งมีลักษณะความยากง่ายของแต่ละฟังก์ชันที่นำมาทดสอบ ในขณะที่ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง (Bisection Method) การลู่เข้าของคำตอบของผลเฉลยจะลู่เข้าได้ก็ต่อเมื่อฟังก์ชันที่มีลักษณะต่ำสุดเฉพาะที่หรือจุดสูงสุดเฉพาะที่ที่อยู่ใกล้กันก็จะทำให้สามารถหาคำตอบได้ง่ายและเร็ว แต่ถ้าฟังก์ชันที่มีตัวแปรซับซ้อนก็จะทำให้หาคำตอบได้ยากหรือหาคำตอบไม่ได้เลย

ข้อเสนอแนะ

ในการศึกษาค้นคว้าต่อไปเราสามารถปรับปรุงการหาผลเฉลยของระบบสมการไม่เชิงเส้น สำหรับฟังก์ชันหลายตัวแปร โดยใช้การค้นแบบสุ่มหลายจุดให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น ซึ่งเป็นเรื่องที่น่าสนใจศึกษาต่อโดยเฉพาะการทำให้มีประสิทธิภาพสำหรับการคำนวณฟังก์ชันหลายตัวแปร

เอกสารอ้างอิง

- Sheela, B.V. (1979). An Optimized step-size random Search (OSSRS). *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*. 19: 99-106.
- Mohamed, Ali W., Hegazy Z. Sabry and Motaz Khorshid. (2012). An alternative differential evolution algorithm for global optimization. 3: 149-165.
- Zabinsky, Zelda B. (2009). Random Search Algorithms, Department of Industrial and Engineering, University of Washington. Seattle. April 5.
- Stoer, J. and Bulirsch, R.(1993). Introduction to Numerical Analysis. Springer- Verlag New York, Inc., 2nd edition.
- Alpaslan ErsÖz Mehmet Kurban. (2014). Bisection Method and Algorithm for solving the electrical Circuits. Department of Electrical & Electronics Engineering Bilecik Şeyh Edebali University Bilecik, Turkey.
- Montaz Ali, Aimo TÖrn and Sami viitanen. (1997). A Numerical Comparison of some Modified Controlled Random search Algorithm. Turku centre for computer science TUCS Technical Report.98
- Raphael B. and Smith I.F.C. A probabilistic search algorithm for finding optimally directed solutions. Institute of Structural Engineering and Mechanics (ISS-IMAC) CH-1015 Lausanne EPFL-Federal Institute of Technology Switzerland.