



วิชัญัยแบบสหัสญาณบน n-ปริภูมิ

Intuitionistic Fuzzy n-spaces

พีรเชษฐ์ บุญพัชรเจริญ อาริรักษ์ ชัยวร

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อสร้างนิยามวิชัญัยแบบสหัสญาณบน n-ปริภูมิและนิยามทอพอโลยีบนวิชัญัยแบบสหัสญาณบน n-ปริภูมิพร้อมทั้งศึกษาสมบัติต่างๆ ของทอพอโลยีบนวิชัญัยแบบสหัสญาณบน n-ปริภูมิ ดำเนินการโดยศึกษาเอกสารและงานวิจัยต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง รวมทั้งศึกษาแนวทางในการพิสูจน์จากการทำงานวิจัยต่างๆ โดยได้ผลการวิจัย ดังนี้

1. นิยามวิชัญัยแบบสหัสญาณบน n-ปริภูมิ และตัวอย่างของวิชัญัยแบบสหัสญาณบน n-ปริภูมิ
2. ทอพอโลยีบนวิชัญัยแบบสหัสญาณบน n-ปริภูมิและตัวอย่างของวิชัญัยแบบสหัสญาณบน n-ปริภูมิ
3. สมบัติเบื้องต้นต่าง ๆ ของปริภูมิทอพอโลยีบนวิชัญัยแบบสหัสญาณบน n-ปริภูมิ เช่น บอลเปิด เซตเปิด ลำดับลู่เข้า ลำดับโคซี ทฤษฎีบทของแบร์และคันทอร์ เป็นต้น

คำสำคัญ : วิชัญัยแบบสหัสญาณบน n-ปริภูมิ, วิชัญัยแบบสหัสญาณบนปริภูมิอิงระยะทาง

Abstract

This research aimed to define intuitionistic fuzzy n-space and the topology of intuitionistic fuzzy n-space and studies about some properties of topology of intuitionistic fuzzy n-space. We conducted by studied some research about them and including studied some ideas for prove. We obtained the following findings:

1. The definition of intuitionistic fuzzy n-space and some examples.
2. The topology of intuitionistic fuzzy n-space and some examples.
3. Some properties of topology of intuitionistic fuzzy n-space such as open balls, open sets, convergent series, Cauchy sequences, Baire's theorem and Cantor's theorem, etc.

Keywords : Intuitionistic fuzzy n-spaces, Intuitionistic fuzzy metric spaces.



บทนำ

ในปัจจุบันทฤษฎีบทของเซตวิชันนัย (Fuzzy set) ซึ่งนำเสนอโดยซาเดห์ (Zadeh) ในปี ค.ศ. 1965 ได้มีการพัฒนาและประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวางในศาสตร์ต่าง ๆ โดยเฉพาะศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับวิทยาศาสตร์ เช่น การเคลื่อนไหวของประชากร (Population dynamics) การควบคุมความอลวน (Chaos control) โปรแกรมทางคอมพิวเตอร์และในระบบไดนามิกแบบไม่เชิงเส้น (Non-linear dynamics system) เป็นต้น จนกระทั่งในปี ค.ศ. 1984 อตานาสซอฟ (Atanassov) ได้นำเสนอแนวคิดเกี่ยวกับวิชันนัยแบบสหัสฐานบนเซต (Intuitionistic fuzzy set) ซึ่งได้รับการพัฒนาจนเกิดเป็นแนวคิดใหม่ๆ มากมาย เช่น วิชันนัยแบบสหัสฐานบนปริภูมิอิงระยะทาง (Intuitionistic fuzzy metric spaces) วิชันนัยแบบสหัสฐานบนปริภูมิเชิงทอพอโลยี (Intuitionistic fuzzy topology spaces) วิชันนัยแบบสหัสฐานบนปริภูมินอร์ม (Intuitionistic fuzzy normed spaces) วิชันนัยแบบสหัสฐานบน 2-ปริภูมินอร์ม (Intuitionistic fuzzy 2-normed spaces) เป็นต้น ในปี ค.ศ. 2009 เมอร์ซาลีน (Mursaleen) โลฮานี แदनนิช (Lohani Danish) และ โมฮิอุดดีน (Mohiuddine) ได้นำเสนอแนวคิดเกี่ยวกับ วิชันนัยแบบสหัสฐานบน 2-ปริภูมิอิงระยะทาง (Intuitionistic fuzzy 2-metric spaces) ในงานวิจัยนี้จะกำหนดนิยามของวิชันนัยแบบสหัสฐานบน n-ปริภูมิ (Intuitionistic fuzzy n-spaces) พร้อมทั้งศึกษาสมบัติพื้นฐานต่างๆ เพื่อให้ได้ข้อสรุปเป็นองค์ความรู้ใหม่เกี่ยวกับวิชันนัยแบบสหัสฐานบน n-ปริภูมิ

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

สร้างนิยามวิชันนัยแบบสหัสฐานบน n-ปริภูมิและนิยามทอพอโลยีบนวิชันนัยแบบสหัสฐานบน n-ปริภูมิพร้อมทั้งศึกษาสมบัติต่างๆ ของทอพอโลยีบนวิชันนัยแบบสหัสฐานบน n-ปริภูมิ

วิธีดำเนินการวิจัย

ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง เช่น เซตวิชันนัย วิชันนัยแบบสหัสฐานบนเซต วิชันนัยแบบสหัสฐานบนปริภูมิอิงระยะทาง วิชันนัยแบบสหัสฐานบน 2-ปริภูมิอิงระยะทางและศึกษาสมบัติต่างๆ ของวิชันนัยแบบสหัสฐานบน 2-ปริภูมิอิงระยะทางรวมทั้งศึกษาแนวทางในการพิสูจน์ จากการศึกษาวิจัยต่างๆ นี้พบว่าสามารถนิยามวิชันนัยแบบสหัสฐานบน n-ปริภูมิและทอพอโลยีบนวิชันนัยแบบสหัสฐานบน n-ปริภูมิได้ พร้อมทั้งได้สร้างตัวอย่างนิยามของวิชันนัยแบบสหัสฐานบน n-ปริภูมิและทอพอโลยีบนวิชันนัยแบบสหัสฐานบน n-ปริภูมิ และศึกษาสมบัติ

n-ปริภูมิ ผู้วิจัยจะเริ่มพิจารณาจากสมบัติต่างๆ เช่น บอลเปิด เซตเปิด ลำดับลู่เข้า ลำดับโคซี การมีขอบเขตแบบวิชันนัยแบบสหัสฐานบนปริภูมิอิงระยะทาง ทฤษฎีบทของแบร์และคันเตอร์ เป็นต้น

ผลการวิจัย

จากการศึกษางานวิจัยต่างๆ ผู้วิจัยสามารถสร้างนิยามวิชันนัยแบบสหัสฐานบน n-ปริภูมิและนิยามทอพอโลยีบนวิชันนัยแบบสหัสฐานบน n-ปริภูมิได้พร้อมทั้งได้สร้างตัวอย่างนิยามของวิชันนัยแบบสหัสฐานบน n-ปริภูมิและทอพอโลยีบนวิชันนัยแบบสหัสฐานบน n-ปริภูมิ และศึกษาสมบัติเบื้องต้นต่างๆ ของทอพอโลยีแบบวิชันนัยสหัสฐานบน n-ปริภูมิ เช่น บอลเปิด เซตเปิด ลำดับลู่เข้า ลำดับโคซี การมีขอบเขตวิชันนัยแบบสหัสฐานบน n-ปริภูมิ ทฤษฎีบทของแบร์และคันเตอร์ เป็นต้น โดยมีผลการวิจัยเป็นดังนี้

1. บทนิยามของวิชันนัยแบบสหัสฐานบน n-ปริภูมิ

บทนิยาม 1.1 (Park, 2004) การดำเนินการทวิภาค

$*: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ จะกล่าวว่ามีความต่อเนื่องแบบ t- นอร์ม (Continuous t-norm) ถ้ามีสมบัติดังนี้

- (1) * มีสมบัติเปลี่ยนกลุ่มและสลับที่
- (2) * เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง
- (3) $a * 1 = a$ สำหรับทุก $a \in [0,1]$
- (4) ถ้า $a \leq c$ และ $b \leq d$ แล้ว $a * b \leq c * d$ สำหรับทุก $a, b, c, d \in [0,1]$

บทนิยาม 1.2 (Park, 2004) การดำเนินการทวิภาค $: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ จะกล่าวว่ามีความต่อเนื่องแบบ t- คอนอร์ม (Continuous t-conorm) ถ้ามีสมบัติดังนี้

- (1) $\diamond$ มีสมบัติเปลี่ยนกลุ่มและสลับที่
- (2) $\diamond$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง
- (3) $a \diamond 0 = a$ สำหรับทุก $a \in [0,1]$
- (4) ถ้า $a \leq c$ และ $b \leq d$ แล้ว $a \diamond b \leq c \diamond d$ สำหรับทุก $a, b, c, d \in [0,1]$

ข้อสังเกต 1.3 (Park, 2004)

- (1) สำหรับทุก $r_1, r_2 \in (0,1)$ โดยที่ $r_1 > r_2$ จะมี $r_3, r_4 \in (0,1)$ ที่ซึ่ง $r_1 * r_3 \geq r_2$ และ $r_1 \geq r_4 \diamond r_2$
- (2) สำหรับทุก $r_5 \in (0,1)$ จะมี $r_6, r_7 \in [0,1]$ ที่ซึ่ง $r_6 * r_6 \geq r_5$ และ $r_7 \diamond r_7 \leq r_5$



บทนิยาม 1.4 ให้ $X \neq \emptyset$ และ d เป็นฟังก์ชันค่าจริงบน X^{n+1} เรียก d ว่า n -เมตริก (n -metric) บน X ถ้ามีสมบัติดังนี้ สำหรับทุกๆ $x_1, \dots, x_{n+1}, w \in X$

- (1) สำหรับทุกๆ สมาชิก $x_1, x_2, \dots, x_n$ ซึ่งแตกต่างกันใน X จะมี $w \in X$ โดยที่ $d(x_1, x_2, \dots, x_n, w) \neq 0$
- (2) $d(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x_i = x_j$ สำหรับบาง $i \neq j$
- (3) $d(x_1, \dots, x_{n+1}) = d(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_{n+1})$ เมื่อ $i, j = 1, 2, \dots, n+1$
- (4) $d(x_1, \dots, x_{n+1}) \leq d(w, x_2, \dots, x_{n+1}) + d(x_1, w, x_3, \dots, x_{n+1}) + \dots + d(x_1, \dots, x_n, w)$ เราจะเรียก (X, d) ว่าเป็นปริภูมิ n -เมตริก

ตัวอย่าง 1.5 ให้

$$X = \mathbb{R}^n \text{ และ } d_n(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \min \{ \|x_i - x_j\| \mid i \neq j \} \text{ เมื่อ } \|x_i - x_j\| = \sqrt{(x_{i1} - x_{j1})^2 + \dots + (x_{in} - x_{jn})^2}$$

โดยที่ $x_{i1} = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, \dots, n+1$ จะได้ว่า $(\mathbb{R}^n, d_n)$ เป็นปริภูมิ n -เมตริก

บทนิยาม 1.6 ให้ X ไม่เป็นเซตว่าง $*$ ต่อเนื่องแบบ t -นอร์ม $\diamond$ ต่อเนื่องแบบ t -โคนอร์มและให้ M, N เป็นความสัมพันธ์แบบวิชันนัย (Fuzzy set) บน $X^{n+1} \times (0, \infty)$ โดยที่ M, N มีสมบัติดังนี้ สำหรับทุกๆ $x_1, \dots, x_{n+1}, w \in X$ และ $t_1, t_2, \dots, t_{n+1}, t > 0$

- (1) $M(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; t) + N(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; t) \leq 1$
- (2) ถ้า $x_i \neq x_j$ สำหรับทุกๆ $i \neq j$ แล้ว $M(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; t) > 0$
- (3) $M(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; t) = 1$ ก็ต่อเมื่อ $x_i = x_j$ สำหรับบาง $i \neq j$
- (4) $M(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; t) = M(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}; t)$ สำหรับทุกๆ $i, j = 1, \dots, n+1$
- (5) $M(x_1, \dots, x_{n+1}; t_1 + \dots + t_{n+1}) \geq M(w, x_2, \dots, x_{n+1}; t_1) * M(x_1, w, x_3, \dots, x_{n+1}; t_2) * \dots * M(x_1, \dots, x_n, w; t_{n+1})$
- (6) $M(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; t) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง
- (7) ถ้า $x_i \neq x_j$ สำหรับทุกๆ $i \neq j$ แล้ว $N(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; t) < 1$

$$(8) N(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; t) = 0 \text{ ก็ต่อเมื่อ } x_i = x_j \text{ สำหรับบาง } i \neq j$$

$$(9) N(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; t) = N(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}; t) \text{ สำหรับทุกๆ } i, j = 1, \dots, n+1$$

$$(10) N(x_1, \dots, x_{n+1}; t_1 + \dots + t_{n+1}) \leq N(w, x_2, \dots, x_{n+1}; t_1) \diamond N(x_1, w, x_3, \dots, x_{n+1}; t_2) \diamond \dots \diamond N(x_1, \dots, x_n, w; t_{n+1})$$

(11) $N(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; t) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จะเรียก $(M, N)_n$ ว่า วิชันนัยแบบสหัชญาณ n -เมตริก (Intuitionistic fuzzy n -metric) บน X และเรียก $(X, M, N, *, \diamond)$ ว่า วิชันนัยแบบสหัชญาณบน n -ปริภูมิ (Intuitionistic fuzzy n -spaces)

ข้อสังเกต 1.7 ให้ $(X, M, N, *, \diamond)$ เป็นวิชันนัยแบบสหัชญาณบน n -ปริภูมิ จะได้ว่าฟังก์ชัน $M(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; t)$ เป็นฟังก์ชันไม่ลดและ $N(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; t)$ เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่ม สำหรับทุกๆ $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in X$

ตัวอย่าง 1.8 ให้ (X, d) เป็นปริภูมิ n -เมตริกให้ $*$ และ $\diamond$ เป็นการดำเนินการทวิภาคซึ่งนิยามโดย $a * b = ab$ และ $a \diamond b = \min\{a+b, 1\}$ สำหรับทุกๆ $a, b \in [0, 1]$ และให้ M_d และ N_d เป็นเซตวิชันนัยบน $X^{n+1} \times (0, \infty)$ นิยามโดย

$$M_d(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; t) = \frac{t}{t + d(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})} \quad \text{และ}$$

$$N_d(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; t) = \frac{d(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})}{t + d(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})}$$

โดยที่ $t < 0$ และ $x_1, \dots, x_{n+1} \in X$ ดังนั้น $(X, M, N, *, \diamond)$ เป็นวิชันนัยแบบสหัชญาณบน n -ปริภูมิ และจะเรียก $(X, M, N, *, \diamond)$ ว่า วิชันนัยแบบสหัชญาณบน n -ปริภูมิที่กำหนดโดยวิชันนัยแบบสหัชญาณ n -เมตริก d



2. ทอพอโลยีบนวิชันัยแบบสัทัญญานบน n-ปริภูมิ

บทนิยาม 2.1 ให้ (X, d) เป็นปริภูมิ n-เมตริกและ

$r \in \mathbb{R}$ เรียกเซต

$$B_d(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y, z_1, \dots, z_{n-1}) < r, \forall z_i \in X\}$$

ว่า บอลเปิด (Open ball) เทียบกับ n-เมตริก d โดยมี

จุดศูนย์กลางที่ x และรัศมี r

ตัวอย่าง 2.2 จากตัวอย่าง 1.5 ได้แล้วว่า $(\mathbb{R}^n, d_n)$

เป็นปริภูมิ n-เมตริก กำหนดให้ $r = 1$ และ

$$0 = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \text{ จะได้ } B_{d_n}(0, 1)$$

$$= \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(0, y, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) < 1, \forall z_i \in \mathbb{R}^n\} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| < 1\}$$

บทนิยาม 2.3 ให้ $(X, M, N, *, \diamond)$ เป็นวิชันัย

แบบสัทัญญานบน n-ปริภูมิ และ $r \in (0, 1)$ $t > 0$ และ $x \in X$

เรียกเซต $B(x, r; t) = \{y \in X \mid M(x, y, z_1, \dots, z_{n-1}; t) > 1 - r,$

$$N(x, y, z_1, \dots, z_{n-1}; t) < r, \forall z_i \in X\}$$

ว่าเป็นบอลเปิด (open ball) ที่มีจุดศูนย์กลางที่ x และรัศมี r ณ จุด t

ตัวอย่าง 2.4 ให้ $(\mathbb{R}^n, M_d, N_d, *, \diamond)$ เป็นวิชันัย

แบบสัทัญญานบน n-ปริภูมิซึ่งกำหนดโดยวิชันัยแบบสัทัญญาน

n-เมตริก d_n และให้ $r = \frac{1}{2}$ $t = 1$ และ $0 = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$

$$\text{จะได้ว่า } B_{d_n}\left(0, \frac{1}{2}; 1\right) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| < 1\}$$

บทนิยาม 2.5 ให้ $(X, M, N, *, \diamond)$ เป็นวิชันัย

แบบสัทัญญานบน n-ปริภูมิ จะนิยาม $\tau_{(M, N)_n}$ คือ

$$\tau_{(M, N)_n} = \{A \subseteq X \mid \forall x \in A, \exists t > 0, \exists r \in (0, 1) \text{ โดยที่}$$

$$B(x, r; t) \subseteq A\}$$

ทฤษฎีบท 2.6 จากบทนิยาม 2.5 จะได้ $\tau_{(M, N)_n}$

เป็นทอพอโลยีบน $(X, M, N, *, \diamond)$

บทตั้ง 2.7 ให้ $r \in (0, 1)$ จะได้ว่ามี $s_1, s_2 \in (0, 1)$

$$\text{โดยที่ } \underbrace{s_1 * \dots * s_1}_{n \text{ terms}} \geq r \quad \text{และ} \quad \underbrace{s_2 \diamond \dots \diamond s_2}_{n \text{ terms}} \leq r \quad \text{สำหรับทุกๆ}$$

$n \in \mathbb{N}$ ทฤษฎีบท 2.8 สำหรับทุก ๆ บอลเปิด $B(x, r, t)$ จะเป็นเซตเปิด

ข้อสังเกต 2.9 (1) สำหรับทุกๆ วิชันัยแบบสัทัญญาน

n-เมตริก $(M, N)_n$ บน X สามารถสร้างทอพอโลยี $\tau_{(M, N)_n}$

บน X ได้โดยที่มีฐานเป็นวงศ์ของเซตเปิดทั้งหมด

$$(2) \text{ เนื่องจาก } \left\{ B\left(x, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \mid n = 1, 2, \dots \right\} \text{ เป็นฐาน}$$

เฉพาะที่ (Local base) ที่จุด x และจะได้ว่าทอพอโลยี $\tau_{(M, N)_n}$ เป็นสัจพจน์ลำดับที่หนึ่งของการนับได้ (The first axiom of countability)

ทฤษฎีบท 2.10 สำหรับทุกๆ วิชันัยแบบสัทัญญาน

บน n-ปริภูมิเป็นปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟพิสูจน์ให้ $(X, M, N, *, \diamond)$

เป็นวิชันัยแบบสัทัญญานบน n-ปริภูมิและ x, y เป็นสมาชิก

ที่แตกต่างกันใน X $t > 0$ และให้ $z'_1, z'_2, \dots, z'_{n-1} \in X$ โดยที่

$$M(x, y, z'_1, \dots, z'_{n-1}; t) \neq 0$$

$$\text{ให้ } r_1 = M(x, y, z'_1, \dots, z'_{n-1}; t) \text{ และ } r_2 = M\left(x, y, z'_1, \dots, z'_{n-1}; \frac{t}{n+1}\right)$$

ให้ $r = \max\{r_1, r_2\}$ แล้วสำหรับแต่ละ $r_0 \in (r, 1)$ จะมี $r_3 \in (0, 1)$ โดยที่ $\underbrace{r_3 * \dots * r_3}_{n+1 \text{ terms}} \geq r_0$

$$\text{สมมติให้ } w \in B\left(x, 1 - r_3; \frac{t}{n+1}\right) \cap B\left(y, 1 - r_3; \frac{t}{n+1}\right)$$

ถ้า $w \neq x \neq y \neq z_i$ สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, \dots, n-1$ แล้ว

พิจารณา $M(x, y, z'_1, \dots, z'_{n-1}; t)$ จากบทนิยาม 1.6(5)

โดยให้ $w = w$ และ $t_i = \frac{t}{n+1}$ สำหรับทุก ๆ $i = 1, \dots, n+1$

$$\text{จะได้ } r_1 = M(x, y, z'_1, \dots, z'_{n-1}; t)$$

$$\geq M\left(w, y, z'_1, \dots, z'_{n-1}; \frac{t}{n+1}\right) * M\left(x, w, z'_1, \dots, z'_{n-1}; \frac{t}{n+1}\right)$$

$$* M\left(x, y, w, z'_2, \dots, z'_{n-1}; \frac{t}{n+1}\right) * \dots * M\left(x, y, z'_1, \dots, z'_{n-2}, w; \frac{t}{n+1}\right)$$

$$> \underbrace{r_3 * \dots * r_3}_{n+1 \text{ terms}} \geq r_0 > r_1 \text{ ซึ่งขัดแย้ง}$$

ถ้า $w = z'_i$ สำหรับบาง $i = 1, 2, \dots, n-1$ แล้วพิจารณา

$M(x, y, z'_1, \dots, z'_{n-1}; t)$ ในทำนองเดียวกันโดยให้ $w = w$ และ

$$t_i = \frac{t}{n+1} \text{ สำหรับทุกๆ } i = 1, \dots, n+1 \text{ จะได้}$$

$$r_1 \geq M\left(x, y, z'_1, \dots, z'_{i-1}, w, z'_{i+1}, \dots, z'_{n-1}; \frac{t}{n+1}\right) * \underbrace{1 * \dots * 1}_{n \text{ terms}}$$

$$> \underbrace{r_3 * 1 * \dots * 1}_{n \text{ terms}} \geq \underbrace{r_3 * \dots * r_3}_{n+1 \text{ terms}} \geq r_0 > r_1 \text{ ซึ่งขัดแย้ง}$$

ถ้า $w = x$ แล้ว

$$r_1 = M(x, y, z'_1, \dots, z'_{n-1}; t) > \underbrace{r_3 * 1 * \dots * 1}_{n \text{ terms}} \geq \underbrace{r_3 * \dots * r_3}_{n+1 \text{ terms}} \geq r_0 > r_1$$

ซึ่งขัดแย้ง



ดังนั้น $(X, M, N, *, \diamond)$ เป็นปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟ #

บทนิยาม 2.11 ให้ (X, d) เป็นปริภูมิ n -เมตริกและให้ A เป็นเซตย่อยของ X จะกล่าวว่า A มีขอบเขต (bounded) ก็ต่อเมื่อมี $M \in \mathbb{R}^+$ ที่ซึ่ง $d(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \leq M$ สำหรับทุก ๆ $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in A$

บทนิยาม 2.12 กำหนดให้ $(X, M, N, *, \diamond)$ เป็นปริภูมิแบบสหัสญาณบน n -ปริภูมิและให้ A เป็นเซตย่อยของ X จะกล่าวว่า A มีขอบเขตแบบวิกษัยแบบสหัสญาณบน n -ปริภูมิ (IF_n -bounded) ก็ต่อเมื่อมี $t > 0$ และมี $r \in (0, 1)$ ที่ซึ่ง $M(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; t) > 1 - r$ และ $N(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; t) < r$ สำหรับทุก ๆ $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in A$

ตัวอย่าง 2.13 ให้ $(X, M, N, *, \diamond)$ เป็นปริภูมิ

แบบสหัสญาณบน n -ปริภูมิและกำหนดให้

$$A = \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1), (1, \dots, 1)\}$$

ถ้า $t = 1$ และ $r = \frac{1}{2}$ แล้ว $M_{d_n}(x_1, \dots, x_{n+1}; 1) > 1 - \frac{1}{2}$ และ

$$N_{d_n}(x_1, \dots, x_{n+1}; 1) < \frac{1}{2} \text{ สำหรับทุก ๆ } x_1, \dots, x_{n+1} \in A$$

ดังนั้น A มีขอบเขตแบบวิกษัยแบบสหัสญาณบน n -ปริภูมิ

ข้อสังเกต 2.14 ให้ $(X, M, N, *, \diamond)$ เป็นปริภูมิแบบ

สหัสญาณบน n -ปริภูมิกำหนดโดย n -เมตริก d_n จะได้เซตย่อย A ของ X มีขอบเขตแบบวิกษัยแบบสหัสญาณบน n -ปริภูมิ ก็ต่อเมื่อ A มีขอบเขตบนปริภูมิ n -เมตริก (X, d_n)

ข้อสังเกต 2.15 ให้ $(X, M, N, *, \diamond)$ เป็นปริภูมิ

แบบสหัสญาณบน n -ปริภูมิ ถ้า A เป็นเซตย่อยกระชับ (Compact subset) แล้ว A เป็นเซตปิด

ทฤษฎีบท 2.16 สำหรับทุก ๆ เซตย่อยกระชับ A ของปริภูมิแบบสหัสญาณบน n -ปริภูมิ $(X, M, N, *, \diamond)$ จะได้ว่า

A มีขอบเขตแบบวิกษัยแบบสหัสญาณบน n -ปริภูมิ

พิสูจน์ ให้ $(X, M, N, *, \diamond)$ เป็นปริภูมิแบบสหัสญาณบน

n -ปริภูมิและให้ A เป็นเซตย่อยกระชับของ X

สมมติให้ $t > 0$ และ $r \in (0, 1)$ พิจารณาเซตเปิด

$$\{B(x, r; t) | x \in A\} \text{ ของ } A \text{ จะได้ว่ามี } x^i \in A \text{ โดยที่}$$

$$A \subset \bigcup_{i=1}^m B(x^i, r; t) \text{ ถ้า } y_j \in A \text{ สำหรับทุก ๆ } j = 1, \dots, n+1$$

$$\text{แล้ว } y_j \in B(x^{k_j}, r; t) \text{ สำหรับบาง } k_j$$

$$\text{ลำดับต่อไปกำหนดให้ } \alpha = M(x^{k_1}, x^{k_2}, \dots, x^{k_{n+1}}; t)$$

$$\text{และ } \beta = N(x^{k_1}, x^{k_2}, \dots, x^{k_{n+1}}; t)$$

ถ้า $x^{k_i} \neq x^{k_j}$ เมื่อ $i \neq j$ แล้วพิจารณา

$$M(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}; (n^2 + n + 1)t) \text{ จากนิยาม 1.6(5) โดยให้}$$

$$w = x_1, t_1 = (n^2 + 1)t \text{ และ } t_i = t \text{ เมื่อ } i > 1 \text{ จะได้}$$

$$M(y_1, \dots, y_{n+1}; (n^2 + n + 1)t) > M(x^{k_1}, y_2, \dots, y_{n+1}; (n^2 + 1)t) \underbrace{*(1-r) \dots *(1-r)}_{n \text{ terms}}$$

และในทำนองเดียวกันจะได้

$$M(x^{k_1}, y_2, y_3, \dots, y_{n+1}; (n^2 + 1)t) > M(x^{k_1}, x^{k_2}, y_3, \dots, y_{n+1}; (n^2 - n + 1)t) \underbrace{*(1-r) \dots *(1-r)}_{n \text{ terms}}$$

ดำเนินการตามกระบวนการนี้ต่อไป จะได้

$$M(x^{k_1}, x^{k_2}, \dots, x^{k_n}, y_{n+1}; (n+1)t) > \underbrace{(1-r) \dots *(1-r)}_{n \text{ terms}} * \alpha$$

ดังนั้น

$$M(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}; (n^2 + n + 1)t) > \underbrace{(1-r) \dots *(1-r)}_{n(n+1) \text{ terms}} * \alpha \geq 1 - s_1$$

สำหรับบาง $s_1 \in (0, 1)$ และในทำนองเดียวกันจะได้

$$N(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}; (n^2 + n + 1)t) < \underbrace{r \diamond \dots \diamond r}_{n(n+1) \text{ terms}} \diamond \beta \leq s_2 \text{ สำหรับ}$$

บาง $s_2 \in (0, 1)$.

$$\text{สมมติให้ } s = \max\{s_1, s_2\} \text{ และ } t' = (n^2 + n + 1)t$$

จะได้ $M(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}; t') > 1 - s$ และ

$$N(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}; t') < s \text{ สำหรับทุก ๆ } y_1, \dots, y_{n+1} \in A \text{ นั่นคือ}$$

A มีขอบเขตแบบวิกษัยแบบสหัสญาณบน n -ปริภูมิ ถ้า

$$x^{k_i} = x^{k_j} \text{ สำหรับบาง } i \neq j \text{ แล้ว } \alpha = 1 \text{ และ } \beta = 0$$

$$\text{ดังนั้น } M(y_1, \dots, y_{n+1}; t') > \underbrace{(1-r) \dots *(1-r)}_{n(n+1) \text{ terms}} * 1 \geq 1 - s_3$$

$$\text{และ } N(y_1, \dots, y_{n+1}; t') < \underbrace{r \diamond \dots \diamond r}_{n(n+1) \text{ terms}} \diamond 0 < s_4 \text{ สำหรับบาง}$$

$$s_3, s_4 \in (0, 1) \text{ ให้ } s^* = \max\{s_3, s_4\} \text{ และ } t' = (n^2 + n + 1)t$$

$$\text{จะได้ } M(y_1, \dots, y_{n+1}; t') > 1 - s^* \text{ และ } N(y_1, \dots, y_{n+1}; t') < s^*$$

สำหรับทุก ๆ $y_1, \dots, y_{n+1} \in A$ ดังนั้น A มีขอบเขตแบบวิกษัย

แบบสหัสญาณบน n -ปริภูมิ #

บทนิยาม 2.17 กำหนดให้ $(X, M, N, *, \diamond)$ เป็นปริภูมิ

แบบสหัสญาณบน n -ปริภูมิและ $\tau_{(M, N)_n}$ เป็นทอพอโลยีบน X

ซึ่งกำหนดโดยวิกษัยแบบสหัสญาณ n -เมตริกซ์ $(M, N)_n$ และ

(x_n) เป็นลำดับใน X จะกล่าวว่าลำดับ (x_n) ลู่เข้าแบบวิกษัย

แบบสหัสญาณบน n -ปริภูมิสู่ $x \in X$ (เขียนแทนโดย

$$x_n \xrightarrow{(M, N)_n} x) \text{ ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ } r \in (0, 1) \text{ และทุก ๆ}$$

$$t > 0 \text{ จะมี } n_0 \in \mathbb{N} \text{ โดยที่สำหรับทุก ๆ } n \geq n_0 \text{ แล้ว}$$

$$x_n \in B(x, r; t) \text{ กล่าวคือ } M(x_n, x, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}; t) > 1 - r$$

$$\text{และ } N(x_n, x, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}; t) < r \text{ สำหรับทุก ๆ}$$

$$z_1, z_2, \dots, z_{n-1} \in X$$



ทฤษฎีบท 2.18 ให้ $(X, M, N, *, \diamond)$ เป็นวิภันัยแบบสัทซ์ญาณบน n -ปริภูมิและ $\tau_{(M,N)_n}$ เป็นทอพอโลยีบน X ซึ่งกำหนดโดยวิภันัยแบบสัทซ์ญาณ n -เมตริก $(M, N)_n$ ถ้า (x_n) เป็นลำดับใน X แล้ว $x_n \xrightarrow{(M,N)_n} x$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ $t > 0$ จะได้ $M(x_n, x, z_1, \dots, z_{n-1}; t) \rightarrow 1$ และ $N(x_n, x, z_1, \dots, z_{n-1}; t) \rightarrow 0$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$ และ $z_1, \dots, z_{n-1} \in X$ พิสูจน์ ให้ $t > 0$ และ $x_n \xrightarrow{(M,N)_n} x$ จะได้ว่าสำหรับแต่ละ $r \in (0, 1)$ จะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่สำหรับทุก ๆ $n \geq n_0$ จะได้ว่า $|1 - M(x_n, x, z_1, \dots, z_{n-1}; t)| < r$ และ $|0 - N(x_n, x, z_1, \dots, z_{n-1}; t)| < r$ สำหรับทุก ๆ $z_1, \dots, z_{n-1} \in X$ นั่นคือ $M(x_n, x, z_1, \dots, z_{n-1}; t) \rightarrow 1$ และ $N(x_n, x, z_1, \dots, z_{n-1}; t) \rightarrow 0$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$ และ $z_1, \dots, z_{n-1} \in X$ ในทางกลับกันให้ $t > 0$ $M(x_n, x, z_1, \dots, z_{n-1}; t) \rightarrow 1$ และ $N(x_n, x, z_1, \dots, z_{n-1}; t) \rightarrow 0$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$ สำหรับทุก ๆ $z_1, \dots, z_{n-1} \in X$ ถ้า $O \in \tau_{(M,N)_n}$ โดยที่ $x \in O$ แล้วจะมี $t > 0$ และ $r \in (0, 1)$ โดยที่ $B(x, r; t) \subset O$ และจากสมมติฐานจะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่ $|1 - M(x_n, x, z_1, \dots, z_{n-1}; t)| < r$ และ $|0 - N(x_n, x, z_1, \dots, z_{n-1}; t)| < r$ สำหรับทุก ๆ $n \geq n_0$ นั่นคือ $x_n \in B(x, r; t) \subset O$ สำหรับทุก ๆ $n \geq n_0$ ดังนั้น $x_n \xrightarrow{(M,N)_n} x$ #

ตัวอย่าง 2.19 ให้ $(\square^n, M_d, N_d, *, \diamond)$ เป็นวิภันัยแบบสัทซ์ญาณบน n -ปริภูมิ จะได้ว่าลำดับ (x_n) ใน $\square^n$ ซึ่งนิยามโดย $(x_n) = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 0, \dots, 0 \right) \right\}$ จะลู่เข้าแบบวิภันัยแบบสัทซ์ญาณบน n -ปริภูมิเข้าสู่ $0 = (0, \dots, 0)$

ทฤษฎีบท 2.20 ให้ $(X, M, N, *, \diamond)$ เป็นวิภันัยแบบสัทซ์ญาณบน n -ปริภูมิและให้ (x_n) เป็นลำดับใน X จะได้ว่า $x_n \xrightarrow{(M,N)_n} x$ ก็ต่อเมื่อ $x_n \rightarrow x$ บน $(X, \tau_{(M,N)_n})$ พิสูจน์ สมมติให้ $x_n \xrightarrow{(M,N)_n} x$ และ U เป็นย่านใกล้เคียง (Neighborhood) ของ x จะได้ว่ามี $O \in \tau_{(M,N)_n}$ โดยที่ $x \in O \subset U$ เนื่องจาก $O \in \tau_{(M,N)_n}$ จะมี $t > 0$ และ $r \in (0, 1)$ โดยที่ $B(x, r; t) \subset O$ จาก $x_n \xrightarrow{(M,N)_n} x$ เพราะฉะนั้นจะมี $k_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่สำหรับทุก ๆ และ $z_1, \dots, z_{n-1} \in X$ จะได้ว่า $M(x_k, x, z_1, \dots, z_{n-1}; t) > 1 - r$ และ $N(x_k, x, z_1, \dots, z_{n-1}; t) < r$ พิจารณา $B(x, r; t)$ พบว่า

$x_k \in B(x, r; t)$ และ $x_k \in B(x, r; t) \subset O \subset U$ สำหรับทุก ๆ $k \geq k_0$ นั่นคือ $x_n \rightarrow x$ ใน $(X, \tau_{(M,N)_n})$

ในทางกลับกันให้ $x_n \rightarrow x$ บน $(X, \tau_{(M,N)_n})$ $\varepsilon > 0$ และ $t > 0$ เนื่องจาก เป็นย่านใกล้เคียงของ x และ $x_n \rightarrow x$ จะได้ว่ามี $k_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่ $x_k \in B(x, \varepsilon; t)$ สำหรับทุก ๆ $k \geq k_0$ ดังนั้น สำหรับทุก ๆ $k \geq k_0$ และ $z_1, \dots, z_{n-1} \in X$ จะได้ $M(x_k, x, z_1, \dots, z_{n-1}; t) > 1 - \varepsilon$ และ $N(x_k, x, z_1, \dots, z_{n-1}; t) < \varepsilon$ นั่นคือ $x_n \xrightarrow{(M,N)_n} x$ #

ทฤษฎีบท 2.21 ให้ $(X, M, N, *, \diamond)$ เป็นวิภันัยแบบสัทซ์ญาณบน n -ปริภูมิและให้ $A \subset X$ ถ้า $x \in \bar{A}$ แล้วจะมีลำดับ $(x_n) \in A$ โดยที่ $x_n \rightarrow x$ บน $(X, \tau_{(M,N)_n})$ พิสูจน์ ให้ $x \in \bar{A}$ และ $t > 0$ จะได้ $B\left(x, \frac{1}{n}; t\right) \cap A \neq \emptyset$ สำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ ให้ $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}; t\right) \cap A$ สำหรับบาง $n \in \mathbb{N}$ จะได้ $M(x, x_n, z_1, \dots, z_{n-1}; t) > 1 - \frac{1}{n}$ และ $N(x, x_n, z_1, \dots, z_{n-1}; t) < \frac{1}{n}$ สำหรับทุก ๆ $z_1, \dots, z_{n-1} \in X$ ถ้า $n \rightarrow \infty$ แล้วจะได้ $M(x, x_n, z_1, \dots, z_{n-1}; t) \rightarrow 1$ และ $N(x, x_n, z_1, \dots, z_{n-1}; t) \rightarrow 0$ สำหรับทุก ๆ $z_1, \dots, z_{n-1} \in X$ เพราะฉะนั้น $x_n \xrightarrow{(M,N)_n} x$ และจากทฤษฎีบท 2.19 จะได้ $x_n \rightarrow x$ บน $(X, \tau_{(M,N)_n})$ #

บทนิยาม 2.22 ให้ $(X, M, N, *, \diamond)$ เป็นวิภันัยแบบสัทซ์ญาณบน n -ปริภูมิ จะได้ว่า

(a) ลำดับ (x_n) ใน X จะเป็นลำดับโคชีแบบวิภันัยแบบสัทซ์ญาณบน n -ปริภูมิ ถ้าสำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ และ $t > 0$ จะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่ $M(x_n, x_m, z_1, \dots, z_{n-1}; t) > 1 - \varepsilon$ และ $N(x_n, x_m, z_1, \dots, z_{n-1}; t) < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $m, n \geq n_0$ และ $z_1, \dots, z_{n-1} \in X$

(b) $(X, M, N, *, \diamond)$ เป็นปริภูมิบริบูรณ์ (Complete space) ถ้าลำดับโคชีแบบวิภันัยแบบสัทซ์ญาณบน n -ปริภูมิ ทุก ๆ ลำดับเป็นลำดับลู่เข้าบนทอพอโลยี $\tau_{(M,N)_n}$

ทฤษฎีบท 2.23 ให้ $(X, M, N, *, \diamond)$ เป็นวิภันัยแบบสัทซ์ญาณบน n -ปริภูมิ และให้ (x_n) เป็นลำดับใน X ถ้า $x_n \xrightarrow{(M,N)_n} x$ เมื่อ $x \in X$ แล้วลำดับ (x_n) เป็นลำดับโคชีแบบวิภันัยแบบสัทซ์ญาณบน n -ปริภูมิ พิสูจน์ สมมติให้ $x_n \xrightarrow{(M,N)_n} x$ $\varepsilon > 0$ และ $t > 0$ จะมี $r_1, r_2 \in (0, 1)$ โดยที่ $\underbrace{(1-r_1) \dots (1-r_1)}_{n+1 \text{ terms}} \geq 1 - \varepsilon$ และ $\underbrace{r_2 \diamond \dots \diamond r_2}_{n+1 \text{ terms}} \leq \varepsilon$ ให้



$r = \min\{r_1, r_2\}$ จาก $x_n \xrightarrow{(M,N)_n} x$ จะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่

$$M\left(x_k, x, z_1, \dots, z_{n-1}; \frac{t}{n+1}\right) > 1-r \text{ และ}$$

$$N(x_k, x, z_1, \dots, z_{n-1}; \frac{t}{n+1}) < r \text{ สำหรับทุก } k \geq n_0 \text{ และทุก } z_1, \dots, z_{n-1} \in X$$

$$\text{ถ้า } m \geq n_0 \text{ แล้ว } M\left(x_m, x, z_1, \dots, z_{n-1}; \frac{t}{n+1}\right) > 1-r$$

$$\text{และ } N(x_m, x, z_1, \dots, z_{n-1}; \frac{t}{n+1}) < r \text{ สำหรับทุก } z_1, \dots, z_{n-1} \in X \text{ พิจารณา } M(x_m, x_k, z_1, \dots, z_{n-1}; t) \text{ และ}$$

$$N(x_m, x_k, z_1, \dots, z_{n-1}; t) \text{ พบว่า}$$

$$M(x_m, x_k, z_1, \dots, z_{n-1}; t) > \underbrace{(1-r_1) * \dots * (1-r_1)}_{n+1 \text{ terms}} \geq 1-\varepsilon \text{ และ}$$

$$N(x_m, x_k, z_1, \dots, z_{n-1}; t) < \underbrace{r_2 \diamond \dots \diamond r_2}_{n+1 \text{ terms}} \leq \varepsilon \text{ สำหรับทุก } z_1, \dots, z_{n-1} \in X \text{ ดังนั้น } M(x_m, x_k, z_1, \dots, z_{n-1}; t) > 1-\varepsilon \text{ และ}$$

$$N(x_m, x_k, z_1, \dots, z_{n-1}; t) < \varepsilon \text{ สำหรับทุก } z_1, \dots, z_{n-1} \in X \text{ นั่นคือ } (x_n) \text{ เป็นลำดับโคซีแบบวิกษัยแบบสหฐานบน } n\text{-ปริภูมิ} \quad \#$$

ทฤษฎีบท 2.24 กำหนดให้ $(X, M, N, *, \diamond)$ เป็นวิกษัย

แบบสหฐานบน n -ปริภูมิ ถ้าสำหรับทุกๆ ลำดับโคซีใน X มีลำดับย่อยที่เข้าสู่แบบวิกษัยแบบสหฐานบน n -ปริภูมิแล้ว $(X, M, N, *, \diamond)$ เป็นปริภูมิบริบูรณ์ พิสูจน์ ให้ (x_n) เป็นลำดับโคซีใน X และ (x_{i_n}) เป็นลำดับย่อยของ (x_n) โดยที่ (x_{i_n}) เข้าสู่แบบวิกษัยแบบสหฐานบน n -ปริภูมิสู่ x จะแสดงว่า $x_n \xrightarrow{(M,N)_n} x$ ให้ $O \in \tau_{(M,N)_n}$ จากนิยามการเข้าสู่จะมี $t > 0$ และ $\varepsilon \in (0,1)$ โดยที่ $B(x, \varepsilon; t) \subset O$ เลือก $r \in (0,1)$ โดยที่ $\underbrace{(1-r) * \dots * (1-r)}_{n+1 \text{ terms}} \geq 1-\varepsilon$ และ $\underbrace{r \diamond \dots \diamond r}_{n+1 \text{ terms}} \leq \varepsilon$ เนื่องจาก (x_n) เป็นลำดับโคซี

ดังนั้นจะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ ที่ซึ่ง

$$M\left(x_m, x_n, z_1, \dots, z_{n-1}; \frac{t}{n+1}\right) > 1-r \text{ และ}$$

$$N\left(x_m, x_n, z_1, \dots, z_{n-1}; \frac{t}{n+1}\right) < r$$

สำหรับทุก ๆ $m, n \geq n_0$ และทุกๆ $z_1, \dots, z_{n-1} \in X$ เนื่องจาก

$$x_{i_n} \xrightarrow{(M,N)_n} x \text{ ดังนั้นสำหรับทุก ๆ } i_p \geq n_0 \text{ จะได้}$$

$$M\left(x_{i_p}, x, z_1, \dots, z_{n-1}; \frac{t}{n+1}\right) > 1-r \text{ และ}$$

$$N\left(x_{i_p}, x, z_1, \dots, z_{n-1}; \frac{t}{n+1}\right) < r \text{ สำหรับทุก } z_1, \dots, z_{n-1} \in X$$

ถ้า $n \geq n_0$ แล้วพิสูจน์ในทำเดียวกับทฤษฎีบท 2.15

โดยให้ $w = x_{i_p}$ และ $t_i = \frac{t}{n+1}$ เมื่อ $i = 1, \dots, n+1$

$$\text{จะได้ว่า } M(x_n, x, z_1, \dots, z_{n-1}; t) > \underbrace{(1-r) * \dots * (1-r)}_{n+1 \text{ terms}} \geq 1-\varepsilon$$

$$\text{และ } N(x_n, x, z_1, \dots, z_{n-1}; t) < \underbrace{r \diamond \dots \diamond r}_{n+1 \text{ terms}} \leq \varepsilon$$

ดังนั้น $x_n \in B(x, \varepsilon; t)$ สำหรับทุก ๆ $n \geq n_0$ นั่นคือ

$x_n \rightarrow x$ และ $(X, M, N, *, \diamond)$ เป็นปริภูมิบริบูรณ์ $\#$

บทนิยาม 2.25 ให้ $(X, M, N, *, \diamond)$ เป็นวิกษัย

แบบสหฐานบน n -ปริภูมิและให้ A เป็นปริภูมิย่อยของ X

จะเรียก $(M_A, N_A)_n = \left(M \Big|_{A^{n+1} \times (0, \infty)}, N \Big|_{A^{n+1} \times (0, \infty)} \right)_n$ ว่าวิกษัย

แบบสหฐานบน n -เมตริกซึ่งถูกจำกัดโดย A

ทฤษฎีบท 2.26 ให้ $(X, M, N, *, \diamond)$ เป็นวิกษัย

แบบสหฐานบน n -ปริภูมิ A เป็นปริภูมิย่อยของ X และให้

$(M_A, N_A)_n$ เป็นวิกษัยแบบสหฐานบน n -เมตริกซึ่งถูกจำกัด

โดย A ถ้า $(A, M_A, N_A, *, \diamond)$ เป็นปริภูมิย่อยบริบูรณ์แล้ว A

เป็นเซตปิด

พิสูจน์ สมมติให้ $(A, M_A, N_A, *, \diamond)$ เป็นปริภูมิย่อย

บริบูรณ์และให้ $x \in \bar{A}$ เพราะว่า $\tau_{(M,N)_n}$ เป็นสัจพจน์ลำดับ

ที่หนึ่งของการนับเราจึงได้ว่ามีลำดับ (x_n) ใน A โดยที่

$$x_n \rightarrow x \text{ บน } (X, \tau_{(M,N)_n}) \text{ ดังนั้น } (x_n) \text{ เป็นลำดับโคซี}$$

แบบวิกษัยแบบสหฐานบน n -ปริภูมิใน X ถ้าให้ $t > 0$

และ $\varepsilon \in (0,1)$ จะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่สำหรับทุกๆ $m, n \geq n_0$

$$\text{จะได้ } M(x_n, x_m, z_1, \dots, z_{n-1}; t) > 1-\varepsilon \text{ และ}$$

$$N(x_n, x_m, z_1, \dots, z_{n-1}; t) < \varepsilon \text{ สำหรับทุก } z_1, \dots, z_{n-1} \in X$$

$$\text{จาก } A \subseteq X \text{ จะได้ } M_A(x_n, x_m, z_1, \dots, z_{n-1}; t) > 1-\varepsilon$$

$$\text{และ } N_A(x_n, x_m, z_1, \dots, z_{n-1}; t) < \varepsilon \text{ สำหรับทุก } z_1, \dots, z_{n-1} \in A$$

และ $z_1, \dots, z_{n-1} \in A$ ดังนั้นลำดับ (x_n) เป็นลำดับโคซีใน A

จาก A เป็นปริภูมิย่อยบริบูรณ์ จะได้ว่ามี $y \in A$ โดยที่

$x_n \rightarrow y$ เนื่องจาก X เป็นปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟ จะได้ $x = y \in A$

นั่นคือ $\bar{A} \subset A$ $\#$

บทตั้ง 2.27 ให้ $(X, M, N, *, \diamond)$ เป็นวิกษัยแบบ

สหฐานบน n -ปริภูมิ ถ้า $t > 0$ และ $r, s \in (0,1)$ โดยที่

$$\underbrace{(1-s) * \dots * (1-s)}_{n+1 \text{ terms}} \geq 1-r \text{ และ } \underbrace{s \diamond \dots \diamond s}_{n+1 \text{ terms}} \leq r \text{ แล้ว}$$

$$B\left(x, s; \frac{t}{n+1}\right) \subset B(x, r; t)$$

ทฤษฎีบท 2.28 ให้ A เป็นเซตย่อยของวิกษัย

แบบสหฐานบน n -ปริภูมิ $(X, M, N, *, \diamond)$ ดังนั้น A เป็นเซต

ทุกที่ไม่หนาแน่น (Nowhere dense) ก็ต่อเมื่อสำหรับทุกๆ เซต

เปิดซึ่งไม่เป็นเซตว่างใน X จะมีบอลเปิดโดยที่ส่วนปิดคลุม

(Closure) ของบอลเปิดนั้นไม่มีส่วนร่วมกับ A



พิสูจน์ สมมติให้ $A \subseteq X$ และ A เป็นเซตทุกที่ไม่หนาแน่นและ U เป็นเซตเปิดโดยที่ $U \subset X$ และ $U \neq \emptyset$ จะมี $V \neq \emptyset$ เป็นเซตย่อยเปิดของ U โดยที่ $V \subset X - A$ ดังนั้น $V \cap A = \emptyset$ สมมติให้ $x \in V$ จะได้ว่ามี $r \in (0,1)$ และ $t > 0$ โดยที่

$$B(x, r; t) \subset V \text{ เลือก } s \in (0,1) \text{ โดยที่}$$

$$\underbrace{(1-s) * \dots * (1-s)}_{n+1 \text{ terms}} \geq 1-r \text{ และ } \underbrace{s \diamond \dots \diamond s}_{n+1 \text{ terms}} \leq r$$

$$\text{ดังนั้น } \overline{B\left(x, s; \frac{t}{n+1}\right)} \subset B(x, r; t) \text{ แต่จาก}$$

$$B\left(x, s; \frac{t}{n+1}\right) \subset \overline{B\left(x, s; \frac{t}{n+1}\right)} \subset B(x, r; t) \subset V \subset U \text{ จะได้}$$

$$B\left(x, s; \frac{t}{n+1}\right) \subset U \text{ และ } \overline{B\left(x, s; \frac{t}{n+1}\right)} \cap A = \emptyset$$

ในทางกลับกันสมมติให้ A ไม่เป็นเซตทุกที่ไม่หนาแน่น จะได้ว่า $\text{int}(\bar{A}) \neq \emptyset$ และมีเซต $U \neq \emptyset$ โดยที่ $U \subset \bar{A}$ ถ้า

$$B(x, r; t) \text{ เป็นบอลเปิดโดยที่ } B(x, r; t) \subset U \text{ จะได้}$$

$$\overline{B(x, r; t)} \cap A \neq \emptyset \text{ ซึ่งขัดแย้ง} \quad \#$$

ทฤษฎีบท 2.29 (Baire's theorem) ให้ $(X, M, N, *, \diamond)$ เป็นปริภูมิแบบสัจพจน์บน n -ปริภูมิ X เป็นปริภูมิบริบูรณ์ $J \neq \emptyset$ เป็นเซตนับได้และให้ $\{U_i | i \in J\}$ เป็นลำดับของเซตย่อยเปิดที่หนาแน่นสำหรับทุก ๆ $i \in J$ จะได้ว่า $\bigcap_{i \in J} U_i$ เป็นเซตหนาแน่นใน X

พิสูจน์ ให้ $V \neq \emptyset$ เป็นบอลเปิดของ X จากเซตย่อย U_{j_1} หนาแน่นใน X จะได้ $V \cap U_{j_1} \neq \emptyset$ ให้ $x_1 \in V \cap U_{j_1}$ แต่ $V \cap U_{j_1}$ เป็นเซตเปิด จะมี $r_1 \in (0,1)$ และมี $t_1 > 0$ โดยที่ $B(x_1, r_1; t_1) \subset V \cap U_{j_1}$ ให้ $r'_1 < r$ และ $t'_1 = \min\{t_1, 1\}$ โดยที่ $\overline{B(x_1, r'_1; t'_1)} \subset V \cap U_{j_1}$ เนื่องจากเซตย่อย U_{j_2} หนาแน่นใน X จะได้ $B(x_1, r'_1; t'_1) \cap U_{j_2} \neq \emptyset$ ให้ $x_2 \in B(x_1, r'_1; t'_1) \cap U_{j_2}$ เพราะว่า $B(x_1, r'_1; t'_1) \cap U_{j_2}$ เป็นเซตเปิด ดังนั้นมี $r_2 \in (0, \frac{1}{2})$ และ $t_2 > 0$ โดยที่ $B(x_2, r_2; t_2) \subset B(x_1, r'_1; t'_1) \cap U_{j_2}$ ให้ $r'_2 < r'_1$ และ $t'_2 = \min\left\{t_2, \frac{1}{2}\right\}$ โดยที่ $\overline{B(x_2, r'_2; t'_2)} \subset B(x_1, r'_1; t'_1) \cap U_{j_2}$

ดำเนินการตามกระบวนการนี้ต่อไปจะได้ลำดับ (x_n) ใน X และลำดับ (t'_n) โดยที่ $0 < t'_n < \frac{1}{n}$ และ $\overline{B(x_n, r'_n; t'_n)} \subset B(x_{n-1}, r'_{n-1}; t'_{n-1}) \cap U_{j_n}$ ให้ $t > 0$ และ $\varepsilon > 0$ เลือก $n_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่ $\frac{1}{n_0} < t$ และ $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$

$$\text{ดังนั้น } M(x_n, x_m, z_1, \dots, z_{n-1}; t) \geq 1 - r'_n > 1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$$

สำหรับทุก ๆ $m \geq n \geq n_0$ และ $z_1, \dots, z_{n-1} \in X$ และในทำนองเดียวกันจะได้ $N(x_n, x_m, z_1, \dots, z_{n-1}; t) < \varepsilon$ ดังนั้น (x_n)

เป็นลำดับโคซี แต่จาก X เป็นเซตบริบูรณ์ จะมี $x \in X$ โดยที่

$$x_n \xrightarrow{(M, N)_n} x \text{ นั่นคือ } 1 - M\left(x_n, x, z_1, \dots, z_{n-1}; \frac{t'_n}{n+1}\right) < r_1^0$$

$$\text{และ } N\left(x_n, x, z_1, \dots, z_{n-1}; \frac{t'_n}{n+1}\right) < r_2^0 \text{ เมื่อ } r_1^0, r_2^0 \geq r'_n \text{ และ}$$

$$n \rightarrow \infty$$

$$\text{ให้ } k \geq n \text{ จะได้ } 1 - M\left(x_k, x, z_1, \dots, z_{n-1}; \frac{t'_n}{n+1}\right) < r_3^0$$

$$\text{และ } N\left(x_k, x, z_1, \dots, z_{n-1}; \frac{t'_n}{n+1}\right) < r_4^0 \text{ เมื่อ } r_3^0, r_4^0 \in (0,1)$$

$$\text{โดยที่ } (1-r_1^0) * \underbrace{(1-r_3^0) * \dots * (1-r_3^0)}_{n \text{ terms}} \geq 1 - r'_n \text{ และ}$$

$$r_2^0 \diamond \underbrace{r_4^0 \diamond \dots \diamond r_4^0}_{n \text{ terms}} \leq r'_n$$

พิจารณา $M(x_k, x_n, z_1, \dots, z_{n-1}; t'_n)$ พบว่าถ้าพิสูจน์

ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 2.15 โดยให้ $w = x_{i_p}$ และ

$$t_i = \frac{t}{n+1} \text{ เมื่อ } i = 1, \dots, n+1 \text{ จะได้ว่า}$$

$$M(x_k, x_n, z_1, \dots, z_{n-1}; t'_n) > (1-r_1^0) * \underbrace{(1-r_3^0) * \dots * (1-r_3^0)}_{n \text{ terms}} \geq 1 - r'_n$$

และในทำนองเดียวกัน $N(x_k, x_n, z_1, \dots, z_{n-1}; t'_n) < r'_n$ สำหรับทุก ๆ

$z_1, \dots, z_{n-1} \in X$ ดังนั้น $x_k \in B(x_n, r'_n; t'_n)$ สำหรับทุก ๆ $k \geq n$

เนื่องจาก $M(x_n, x, z_1, \dots, z_{n-1}; t'_n) \rightarrow 1$ และ

$$N(x_n, x, z_1, \dots, z_{n-1}; t'_n) \rightarrow 0 \text{ เมื่อ } n \rightarrow \infty \text{ จะได้ว่า}$$

$$1 - M(x_k, x, z_1, \dots, z_{n-1}; t'_n) < r'_n \text{ และ}$$

$$N(x_n, x, z_1, \dots, z_{n-1}; t'_n) < r'_n \text{ นั่นคือ}$$

$$x \in B(x_n, r'_n; t'_n) \subset \overline{B(x_n, r'_n; t'_n)} \text{ และ}$$

$$x \in \overline{B(x_n, r'_n; t'_n)} \subset B(x_{n-1}, r'_{n-1}; t'_{n-1}) \text{ สำหรับทุก ๆ } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{ดังนั้น } V \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_{j_n}\right) \neq \emptyset \text{ และ } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_{j_n} \text{ หนาแน่นใน } X \quad \#$$

บทแทรก 2.30 ให้ $(X, M, N, *, \diamond)$ เป็นปริภูมิ

แบบสัจพจน์บน n -ปริภูมิ X เป็นปริภูมิบริบูรณ์และ $J \neq \emptyset$

เป็นเซตนับได้และ F_i เป็นเซตปิดสำหรับทุก ๆ $i \in J$ ถ้า

$$X = \bigcup_{i \in J} F_i \text{ แล้วจะมี } F_i \text{ อย่างน้อย 1 เซตที่ } \text{int}(F_i) \neq \emptyset$$

บทนิยาม 2.31 ให้ $(X, M, N, *, \diamond)$ เป็นปริภูมิ

แบบสัจพจน์บน n -ปริภูมิและ $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ เป็นวงศ์ของเซตซึ่งไม่เป็น

เซตว่าง จะกล่าวว่า $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ มีวิกษัยแบบสัจพจน์เส้นผ่าน

กลางเป็นศูนย์ (Intuitionistic fuzzy diameter zero) ถ้า

สำหรับทุก ๆ $r \in (0,1)$ และ $t > 0$ จะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่



สำหรับทุก ๆ $x, y \in F_{n_0}$ และทุก ๆ $z_1, \dots, z_{n-1} \in X$ จะได้
 $M(x, y, z_1, \dots, z_{n-1}; t) > 1-r$ และ $N(x, y, z_1, \dots, z_{n-1}; t) < r$
 บทตั้ง 2.32 ให้ $(X, M, N, *, \diamond)$ เป็นวิกษัยแบบ
 สหัชญาณบน n -ปริภูมิและให้ $x, y \in X$ และ $t \in (0, 1)$
 ถ้า $M(x, y, z_1, \dots, z_{n-1}; t) > 1-\varepsilon$ และ $N(x, y, z_1, \dots, z_{n-1}; t) < \varepsilon$
 สำหรับทุก ๆ $\varepsilon \in (0, 1)$ และ $z_1, \dots, z_{n-1} \in X$ แล้ว $x = y$

ข้อสังเกต 2.33 ให้ F เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่าง
 ของวิกษัยแบบสหัชญาณบน n -ปริภูมิจะได้ว่า F มีวิกษัย
 แบบสหัชญาณเส้นผ่านกลางเป็นศูนย์กลางก็ต่อเมื่อ F เป็นเซตโทน
 (Singleton set)

ทฤษฎีบท 2.34 (Cantor's Intersection Theorem)
 ให้ $(X, M, N, *, \diamond)$ เป็นวิกษัยแบบสหัชญาณบน n -ปริภูมิ
 และให้ $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ เป็นลำดับย่อยซ้อนในของเซตปิดที่ไม่เป็นเซต
 ว่างและ $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ มีวิกษัยแบบสหัชญาณเส้นผ่านกลางเป็นศูนย์กลาง
 จะได้ว่า $(X, M, N, *, \diamond)$ เป็นปริภูมิบริบูรณ์ก็ต่อเมื่อ $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$
 พิสูจน์ สมมติให้ $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ และ (x_n) เป็นลำดับโคชีใน X
 ให้ $B_n = \{x_k \mid k \geq n\}$ $F_n = \overline{B_n}$ $s \in (0, 1)$ และ $t > 0$ เลือก
 $r \in (0, 1)$ โดยที่ $\underbrace{(1-r) * \dots * (1-r)}_{2n+1 \text{ terms}} > 1-s$ และ $\underbrace{r \diamond \dots \diamond r}_{2n+1 \text{ terms}} < s$
 แต่จาก (x_n) เป็นลำดับโคชี จะได้ว่ามี $n_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่
 $M\left(x_n, x_m, z_1, \dots, z_{n-1}; \frac{t}{(n+1)^2}\right) > 1-r$ และ
 $N\left(x_n, x_m, z_1, \dots, z_{n-1}; \frac{t}{(n+1)^2}\right) < r$ สำหรับทุก ๆ $m, n \geq n_0$
 และ $z_1, \dots, z_{n-1} \in X$ ให้ $x, y \in F_{n_0}$ เนื่องจาก F_{n_0} เป็นเซตปิด
 จะมีลำดับ (x'_n) และ (y'_n) ใน F_{n_0} โดยที่ $x'_n \xrightarrow{(M, N)_n} x$
 และ $y'_n \xrightarrow{(M, N)_n} y$

ดังนั้น $x'_n \in B\left(x, r; \frac{t}{(n+1)^2}\right)$ และ
 $y'_n \in B\left(x, r; \frac{t}{(n+1)^2}\right)$ สำหรับทุก ๆ n ที่มีค่ามากพอ
 พิจารณา $M(x, y, z_1, \dots, z_{n-1}; t)$ พบว่าถ้าพิสูจน์ใน
 ทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 2.15 โดยให้ $w = x'_n$ และ $t_i = \frac{t}{n+1}$
 เมื่อ $i = 1, \dots, n+1$ จะได้
 $M(x, y, z_1, \dots, z_{n-1}; t) \geq M\left(x'_n, y, z_1, \dots, z_{n-1}; \frac{t}{n+1}\right) * \underbrace{(1-r) * \dots * (1-r)}_{n \text{ terms}}$
 และให้ $w = y'_n$ และ $t_i = \frac{t}{(n+1)^2}$ เมื่อ $i = 1, \dots, n+1$ จะได้
 $M\left(x'_n, y, z_1, \dots, z_{n-1}; \frac{t}{n+1}\right) \geq \underbrace{(1-r) * \dots * (1-r)}_{n+1 \text{ terms}}$

$$\text{ดังนั้น } M(x, y, z_1, \dots, z_{n-1}; t) \geq \underbrace{(1-r) * \dots * (1-r)}_{2n+1 \text{ terms}} > 1-s$$

สำหรับทุก ๆ $z_1, \dots, z_{n-1} \in X$

$$\text{ในทำนองเดียวกันจะได้ } N(x, y, z_1, \dots, z_{n-1}; t) < \underbrace{r \diamond \dots \diamond r}_{2n+1 \text{ terms}} < s$$

สำหรับทุก ๆ $x, y \in F_{n_0}$ และ $z_1, \dots, z_{n-1} \in X$

นั่นคือ $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ มีวิกษัยแบบสหัชญาณเส้นผ่านกลางเป็นศูนย์กลาง
 ให้ $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ $r \in (0, 1)$ และ $t > 0$ จะมี $n_1 \in \mathbb{N}$ โดยที่

$$M(x_n, x, z_1, \dots, z_{n-1}; t) > 1-r \text{ และ } N(x_n, x, z_1, \dots, z_{n-1}; t) < r$$

สำหรับทุก ๆ $n \geq n_1$ และ $z_1, \dots, z_{n-1} \in X$

$$\text{ดังนั้นสำหรับแต่ละ } t > 0 \text{ จะได้ } M(x_n, x, z_1, \dots, z_{n-1}; t) \rightarrow 1$$

$$\text{และ } N(x_n, x, z_1, \dots, z_{n-1}; t) \rightarrow 0 \text{ เมื่อ } n \rightarrow \infty \text{ สำหรับทุก ๆ}$$

$$z_1, \dots, z_{n-1} \in X \text{ นั่นคือ } (X, M, N, *, \diamond) \text{ เป็นปริภูมิบริบูรณ์}$$

ในทางกลับกันสมมติให้ $(X, M, N, *, \diamond)$ เป็นปริภูมิ
 บริบูรณ์ ให้ $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ เป็นลำดับย่อยซ้อนในของเซตปิดที่ไม่เป็น
 เซตว่างและ $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ มีวิกษัยแบบสหัชญาณเส้นผ่านกลางเป็น
 ศูนย์ เลือก $x_n \in F_n$ สำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$

เนื่องจาก $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ มีวิกษัยแบบสหัชญาณเส้นผ่าน
 กลางเป็นศูนย์กลาง ดังนั้นสำหรับทุก ๆ $r \in (0, 1)$ และ $t > 0$ จะมี
 $n_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่ $M(x, y, z_1, \dots, z_{n-1}; t) > 1-r$ และ
 $N(x, y, z_1, \dots, z_{n-1}; t) < r$ เมื่อ $n \geq n_0$ $x, y \in F_{n_0}$ และ
 $z_1, \dots, z_{n-1} \in X$ เนื่องจาก $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ เป็นลำดับย่อยซ้อนใน จะได้
 ว่า $M(x_m, x_n, z_1, \dots, z_{n-1}; t) > 1-r$ และ
 $N(x_m, x_n, z_1, \dots, z_{n-1}; t) < r$ สำหรับทุก ๆ $m, n \geq n_0$ และทุก ๆ
 $z_1, \dots, z_{n-1} \in X$

ดังนั้น (x_n) เป็นลำดับโคชี แต่จาก $(X, M, N, *, \diamond)$

เป็นปริภูมิบริบูรณ์จึงได้อีกว่า $x_n \xrightarrow{(M, N)_n} x$ สำหรับบาง

$x \in X$ เพราะฉะนั้น $x \in \overline{F_n} = F_n$ สำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ นั่นคือ

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \quad \#$$

ข้อสังเกต 2.35 สมาชิก $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ จะเป็นสมาชิก

เพียงตัวเดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบท 2.36 สำหรับทุก ๆ วิกษัยแบบสหัชญาณบน
 n -ปริภูมิที่แยกกันได้จะเป็นสัจพจน์ลำดับที่สองของการนับได้
 (The second axiom of countability)

พิสูจน์ ให้ $(X, M, N, *, \diamond)$ เป็นวิกษัยแบบสหัชญาณบน

n -ปริภูมิที่แยกกันได้และให้ $A = \{x_p \mid p \in \mathbb{N}\}$ เป็นเซตหนาแน่น

ที่นับได้ แต่จาก $\beta = \left\{ B\left(x_p, \frac{1}{k}; \frac{1}{k}\right) \mid p, k \in \mathbb{N} \right\}$ จะได้ β

เป็นเซตนับได้ ให้ U เป็นเซตเปิดใน X และ $x \in U$



จะมี $t > 0$ และ $r \in (0,1)$ โดยที่ $B(x,r;t) \subset U$ จาก

$r \in (0,1)$ จะมี $s \in (0,1)$ โดยที่ $\underbrace{(1-s) * \dots * (1-s)}_{n+1 \text{ terms}} > 1-r$

และ $\underbrace{s \diamond \dots \diamond s}_{n+1 \text{ terms}} < r$ ให้ $m \in \mathbb{N}$ โดยที่ $\frac{1}{m} < \min \left\{ s, \frac{t}{n+1} \right\}$

เนื่องจาก A หนาแน่นใน X จะได้ว่ามี $x_p \in A$ ที่ซึ่ง

$x_p \in B\left(x, \frac{1}{m}; \frac{1}{m}\right)$ ถ้าให้ $y \in B\left(x, \frac{1}{m}; \frac{1}{m}\right)$ แล้วพิจารณา

$M(x, y, z_1, \dots, z_{n-1}; t)$ พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 2.15

โดยให้ $w = x_p$ และ $t_i = \frac{t}{n+1}$ เมื่อ $i = 1, \dots, n+1$ จะได้ว่า

$$M(x, y, z_1, \dots, z_{n-1}; t) > \underbrace{\left(1 - \frac{1}{m}\right) * \dots * \left(1 - \frac{1}{m}\right)}_{n+1 \text{ terms}} \geq \underbrace{(1-s) * \dots * (1-s)}_{n+1 \text{ terms}} > 1-r$$

สำหรับทุกๆ $z_1, \dots, z_{n-1} \in X$ ในทำนองเดียวกันจะได้

$N(x, y, z_1, \dots, z_{n-1}; t) < \underbrace{s \diamond \dots \diamond s}_{n+1 \text{ terms}} < r$ สำหรับทุกๆ $z_1, \dots, z_{n-1} \in X$

ดังนั้น $y \in B(x, r; t) \subset U$ เนื่องจาก $B\left(x_p, \frac{1}{k}; \frac{1}{k}\right)$

เป็นเซตเปิดสำหรับทุก ๆ $p, k \in \mathbb{N}$ จะได้ β เป็นฐาน

เนื่องจาก β เป็นเซตนับได้ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า $(X, M, N, *, \diamond)$

เป็นสัจพจน์ลำดับที่สองของการนับได้ #

ข้อสังเกต 2.37 สำหรับทุกๆ ปริภูมีย่อยของปริภูมิแบบสัจพจน์บน n -ปริภูมิที่แยกกันได้จะมีสมบัติการแยกกันได้

สรุปและอภิปรายผล

งานวิจัยนี้สามารถนิยามปริภูมิแบบสัจพจน์บน n -ปริภูมิและนิยามทอพอโลยีของปริภูมิแบบสัจพจน์บน n -ปริภูมิได้นอกจากนี้ได้สมบัติของปริภูมิเชิงทอพอโลยีบนปริภูมิแบบสัจพจน์บน n -ปริภูมิที่สำคัญต่าง ๆ เช่น สมบัติการลู่เข้า ทฤษฎีบทของแบร์และคันเตอร์ เป็นต้น

เอกสารอ้างอิง

- Abbas, S.E. 2005. On intuitionistic fuzzy compactness. *Inform Sci.* 173, 75-91.
- Atanassov, K. 1986. Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy sets Syst.* 20, 87-96.
- Atanassov, K. 1994. New operations defined over the intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy sets Syst.* 61, 137-42.
- Barros, L.C., Bassanezi, R.C., & Tonelli, P.A. 2000. Fuzzy modeling in population dynamics. *Ecol Model.* 128, 27-33.
- Coker, D. 1997. An introduction to intuitionistic fuzzy topological spaces. *Fuzzy sets Syst.* 88, 81-9.

- El Naschie, M.A. 2000. On the unification of heterotic strings theory and theory. *Chaos Solitions & Fractals.* 11(14), 2397-408.
- El Naschie, M.A. 2004. A review of E-infinity theory and the mass spectrum of high energy particle physics. *Chaos Solitions & Fractals.* 19, 209-36.
- El Naschie, M.A. 2004. Quantum gravity, Clifford algebras, fuzzy set theory and the fundamental constants of nature. *Chaos Solitions & Fractals.* 20, 437-50.
- El Naschie, M.A. 2006. Fuzzy dodecahedron topology and E-infinity space time as a model for quantum physics. *Chaos Solitions & Fractals.* 30, 1025-33.
- Erceg, M.A. 1979. Metric spaces in fuzzy set theory. *J Math Anal Appl.* 69, 205-30.
- Fang, J.X. 2002. A note on the completions of fuzzy metric spaces and fuzzy normed spaces. *Fuzzy Set Syst.* 131, 399-407.
- Fradkov, A.L., & Evans R.J. 2005. Control of chaos: methods and applications in engineering. *Chaos Solitions & Fractals.* 29, 33-56.
- George, A., & Veeramani, P. 1994. On some results in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets Syst.* 64, 395-399.
- Giles, R. 1980. A computer program for fuzzy reasoning. *Fuzzy Sets Syst.* 4, 221-34.
- Hong, L., & Sun, J.Q. 2006. Bifurcations of fuzzy nonlinear dynamical systems. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul.* 1, 1-13.
- Kaleva, O., & Seikkala, S. 1984. On fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets Syst.* 12, 215-29.
- Mursaleen, M., & Lohani, Q.M.D. 2009. Intuitionistic fuzzy 2-normed space and some related concepts. *Chaos Solitions & Fractals.* 42, 224-34.
- Mursaleen, M., Lohani, Q.M.D., & Mohiuddine, S.A. 2009. Intuitionistic fuzzy 2-metric space and its completion. *Chaos Solitions & Fractals.* 42, 1258-65.
- Park, J.H. 2004. Intuitionistic fuzzy metric spaces. *Chaos Solitions & Fractals.* 22, 1039-46.
- Xiao, J., & Zhu, X. 2002. On linearly topological structure and property of fuzzy normed linear space. *Fuzzy sets Syst.* 125, 153-61.
- Zadeh, L.A. 1965. Fuzzy sets. *Inform Control.*, 8, 338-53.