

การพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เพื่อพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

A Development of Learning Model of Mathematical Proofs for Abilities in Writing Proofs

นฤเบศ ลาภยิ่งยง ^{1,*}
Narubet Lapyingyong ^{1,*}

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อ 1) สร้างและพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เพื่อพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ของนักศึกษาสาขาวิชาคณิตศาสตร์ 2) ศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ของนักศึกษาสาขาวิชาคณิตศาสตร์ วิชาหลักการคณิตศาสตร์ เรื่อง ระบบจำนวนจริง การดำเนินการวิจัย มี 3 ระยะ ได้แก่ ระยะที่ 1 การสร้างรูปแบบการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยสังเคราะห์มาจากแนวคิดทฤษฎีเกี่ยวกับการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์และการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และผลการวิเคราะห์ขั้นตอนการสอนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของผู้ทรงคุณวุฒิ 3 ท่าน ระยะที่ 2 การพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ตรวจสอบความเหมาะสมและความเป็นไปได้ และการประเมินความเหมาะสมของผู้เชี่ยวชาญ 3 ท่าน มีค่าความเหมาะสมอยู่ในระดับเหมาะสมมาก ($\bar{X} = 4.33$, S.D. = 0.48) และระยะที่ 3 การทดลองใช้รูปแบบการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ กลุ่มตัวอย่าง ได้แก่ นักศึกษาสาขาวิชาคณิตศาสตร์ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชาหลักการคณิตศาสตร์ ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2559 จำนวน 30 คน ที่ได้มาจากการเลือกแบบเจาะจง (Purposive sampling) เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง ได้แก่ แผนการจัดการเรียนรู้ 4 แผน จำนวน 12 ชั่วโมง เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล ได้แก่ แบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เป็นแบบอัตนัย จำนวน 5 ข้อ สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล ได้แก่ ค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ร้อยละ และสถิติที่ (t-test) ผลการวิจัยพบว่า

1. รูปแบบการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ มี 4 ขั้นตอน ได้แก่ ขั้นที่ 1 ทำความเข้าใจข้อความที่จะพิสูจน์โดยการยกตัวอย่างสิ่งที่เป็นไปตามข้อความที่จะพิสูจน์ สิ่งที่ไม่เป็นไปตามข้อความที่จะพิสูจน์ หรืออาจเขียนแผนภาพประกอบ ขั้นที่ 2 เขียนข้อความให้อยู่ในรูปประโยคตรรกศาสตร์ ขั้นที่ 3 เลือกวิธีพิสูจน์โดยพิจารณาจากประโยคตรรกศาสตร์ ขั้นที่ 4 เขียนแสดงบทพิสูจน์ โดยเริ่มจากสิ่งที่กำหนดให้ สิ่งที่จะต้องพิสูจน์ พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่กำหนดให้ กับสิ่งที่ต้องพิสูจน์ และเขียนบทพิสูจน์โดยใช้เทคนิคการคิดไปข้างหน้า หรือการคิดไปข้างหลัง หรือผสมผสานกัน

2. ผลการศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาสาขาวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องระบบจำนวน โดยใช้รูปแบบการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ พบว่าคะแนนเฉลี่ยก่อนเรียน เท่ากับ 8.43 (ร้อยละ 33.73)

¹ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏนครราชสีมา, นครราชสีมา 30000

Faculty of Science and Technology, Nakhon Ratchasima Rajabhat University, Nakhon Ratchasima 30000 Thailand

* Corresponding author, e-mail: L.narubet@gmail.com

คะแนนเฉลี่ยหลังเรียน เท่ากับ 16.27 (ร้อยละ 65.07) ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ พบว่าคะแนนหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และผลการเปรียบเทียบความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนกับเกณฑ์ร้อยละ 60 พบว่า คะแนนหลังเรียนสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

คำสำคัญ : คณิตศาสตร์ การพิสูจน์ รูปแบบการจัดการเรียนรู้

ABSTRACT

The purposes of this research were to 1) design and develop a Learning model of mathematical proofs to improve the ability in writing proofs, and 2) study writing proofs abilities of bachelor student mathematics major on number system. The research was divided into three stages; stage 1) design the model by synthesizing theories, related research and analyze the teaching experience of the experts, stage 2) develop the model to the high level of appropriateness in order to check the accuracy and appropriateness of the model by 3 experts, and stage 3) implement the model, the sample were 30 bachelor students who are in mathematics program. The research instruments were 4 lesson plans for 12 hours and data collected by writing proof ability test, both of pre- and post-tests. Data was analyzed with statistic methods to find the percentage, mean, standard deviation and t-test.

This result of this study revealed that;

1. There are 4 steps in learning mathematical proofs: a) understand the proving statement to, b) translate the statement to logical statement, c) choose how to prove and d) write proofs.

2. The writing proof abilities of the mathematics students who had learn number system by the learning mathematical proofs model had pre- and post-tests average score of 8.43 (33.73%) and 16.27 (65.07%). The writing proofs abilities score had post-test higher than pre-test at the .05 level of statistical significance and post-test score higher than 60% criteria at the .05 level.

Keywords: Mathematics Proof Learning Model

บทนำ

การพัฒนาประเทศสู่ความสมดุลและยั่งยืน จะต้องให้ความสำคัญกับการส่งเสริมทุนของประเทศที่มีอยู่ให้เข้มแข็งและมีพลังเพียงพอในการขับเคลื่อนกระบวนการพัฒนาประเทศ โดยเฉพาะการพัฒนาคนหรือทุนมนุษย์ให้เข้มแข็งพร้อมรับการเปลี่ยนแปลงของโลกยุคศตวรรษที่ 21 และการเสริมสร้างปัจจัยแวดล้อมที่เอื้อต่อการพัฒนาคุณภาพของคน ทั้งในเชิงสถาบัน ระบบ โครงสร้างของสังคมให้เข้มแข็งสามารถเป็นภูมิคุ้มกันต่อการเปลี่ยนแปลงต่าง ๆ ที่จะเกิดขึ้นในอนาคต (สำนักปลัดกระทรวงศึกษาธิการ, 2554, น.1) ซึ่งในพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พุทธศักราช 2542

มีความมุ่งหมายที่จะพัฒนาคนไทยให้มีความรู้และทักษะด้านคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี ให้เป็นมนุษย์ที่สมบูรณ์ทั้งร่างกาย จิตใจ สติปัญญา ความรู้ และคุณธรรม จริยธรรม (สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ, 2542, น.12-13)

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดของมนุษย์ และความเจริญก้าวหน้าของโลก มนุษย์ใช้คณิตศาสตร์เป็นพื้นฐานในการศึกษาวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และศาสตร์อื่น ๆ รวมทั้งใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการพัฒนาการคิดที่หลากหลาย ทั้งการคิด

วิเคราะห์ คิดอย่างเป็นเหตุเป็นผล คิดอย่างมีวิจารณญาณ และคิดอย่างเป็นระบบและระเบียบแบบแผน ลักษณะการ คิดดังกล่าวทำให้มนุษย์สามารถวิเคราะห์ปัญหาและ สถานการณ์ คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ และแก้ปัญหา ได้อย่างมีประสิทธิภาพ (สถาบันส่งเสริมการสอน วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2554, น.1) นอกจากนี้ คณิตศาสตร์ยังเป็นภาษาและเครื่องมือที่มีประสิทธิภาพสูง ในการนำไปอธิบายศาสตร์ต่าง ๆ ได้ชัดเจน มีหลักการที่ ถูกต้องเป็นที่ยอมรับโดยทั่วไป จนอาจกล่าวได้ว่า คณิตศาสตร์เป็นรากฐานที่สำคัญของศาสตร์ทั้งปวง (สำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา, 2555, น.3) การจัดการศึกษาสาขาคณิตศาสตร์ในระดับอุดมศึกษา มี จุดมุ่งหมายเพื่อให้ผู้ที่สำเร็จการศึกษามีความรู้ความเข้าใจ ในเนื้อหาวิชา และการให้เหตุผลอย่างถูกต้องตามหลัก คณิตศาสตร์ รวมทั้งมีความสามารถในการสร้างรูปแบบ ทางคณิตศาสตร์ เพื่อเชื่อมโยงและสื่อสารให้เข้าใจปัญหา ที่เกิดขึ้นในโลกอย่างลึกซึ้ง และสามารถนำความรู้และ เครื่องมือทางคณิตศาสตร์ไปประยุกต์แก้ปัญหา (สำนักงาน คณะกรรมการการอุดมศึกษา, 2555, น.3)

การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ถือว่าเป็นหัวใจสำคัญ ในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ดังที่ Hersh (1993, p.392) ได้ กล่าวไว้ว่า นักคณิตศาสตร์ให้ความสนใจต่อการพิสูจน์ มากกว่าคุณค่าของผลลัพธ์ และถือว่าการพิสูจน์เป็น สิ่งจำเป็นจะละเว้นเสียมิได้ สอดคล้องกับ Markel (1994, pp. 291-295) ที่กล่าวว่า การพิสูจน์เป็นหัวใจสำคัญของ คณิตศาสตร์ การสร้างทฤษฎีบท และการพิสูจน์ทฤษฎีบท เป็นหน้าที่ของนักคณิตศาสตร์ ส่วน Solow (2002, p.1) กล่าวถึง จุดมุ่งหมายที่สำคัญอย่างหนึ่งของนักคณิตศาสตร์ ก็คือ การค้นหาความจริงทางคณิตศาสตร์ และสื่อสารความ จริงนั้นผ่านบทพิสูจน์ด้วยภาษาคณิตศาสตร์ เนื่องจาก ภาษาคณิตศาสตร์มีความสำคัญอย่างหนึ่งคือ ความถูกต้อง แม่นยำ บทพิสูจน์ที่ดีควรจะถูกนำเสนออย่างเป็นขั้น เป็นตอน นอกจากนี้ Saeed (1997, pp. 4300-A) ยังได้ กล่าวไว้ว่า ความสามารถในการพิสูจน์ และความเข้าใจใน ธรรมชาติของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ รวมทั้งเทคนิควิธี ในการพิสูจน์เป็นองค์ประกอบในการวิเคราะห์ที่สำคัญใน การเรียนการสอนคณิตศาสตร์

การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับ อุดมศึกษานักศึกษาจะต้องทำความเข้าใจ วิเคราะห์และ สามารถแสดงการพิสูจน์ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ แสดง ความคิดเห็นและเขียนแสดงการพิสูจน์เองได้ อีกทั้งต้อง เข้าใจและเห็นคุณค่าของการพิสูจน์ด้วย ถึงกระนั้นก็ตาม ยังคงมีนักศึกษาจำนวนมากที่มีปัญหาในการอ่านและเขียน การพิสูจน์ หลายคนมีความคิดรวบยอดที่ผิดเกี่ยวกับการ พิสูจน์และเทคนิคในการพิสูจน์ ซึ่งเป็นสิ่งขัดขวาง ความสามารถในการเขียนการพิสูจน์ของนักศึกษา (Saeed, 1997, pp.4300-A ; อ้างถึงใน วัชร น้อยมี, 2551, น.3) ถึงแม้ว่าในช่วงเวลาที่ผ่านมาระบบการเรียนการสอนและการ พิสูจน์จะได้รับความสนใจเพิ่มมากขึ้น (Hanna and deVilliers, 2008; NCTM, 2000, 2009, p.45) แต่ผลการ วิจัยพบว่าปัญหาของนักเรียนและการรับรู้ในการให้เหตุผล แบบนิรนัยและข้อจำกัดของความเข้าใจเรื่องการพิสูจน์ว่า เป็นสิ่งที่ไม่สามารถประสบความสำเร็จได้ง่าย (Harel and L. Solow, 2007; Healy and Hoyles, 2000, p.98) จึง ไม่เป็นที่น่าแปลกใจเกี่ยวกับปัญหาหลายอย่างของนักเรียน ในเรื่องการพัฒนาความสามารถเกี่ยวกับการพิสูจน์ เกี่ยวข้องกับความเข้าใจของครูเกี่ยวกับธรรมชาติของ การพิสูจน์และบทบาทของการพิสูจน์ในคณิตศาสตร์ (Dreyfus, 1999; Harel and Rabin, 2010; Jahnke, 2007, p.25) การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์นั้นถือได้ว่าเป็นเรื่องยาก สำหรับผู้เรียนจำนวนไม่น้อย นักศึกษามีปัญหาในการ เริ่มต้นการพิสูจน์ ทั้งยังไม่เห็นความสำคัญของการพิสูจน์ และคิดว่าการพิสูจน์เป็นเรื่องยากและน่าเบื่อ (ขจรศรี วรรณสถิต, 2544, น.2) นอกจากนี้ Moore (1990, pp. 137-144) ได้กล่าวว่าในการเรียนวิชาที่เน้นการพิสูจน์ นักศึกษามักประสบปัญหาในการอ่านและเขียนการพิสูจน์ ซึ่งสาเหตุที่ทำให้ นักศึกษาประสบปัญหาในการพิสูจน์ได้แก่ นักศึกษาไม่ทราบนิยาม นั่นคือ เขาไม่สามารถเขียน บทนิยามได้นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจเชิงสัญชาตญาณ (Intuitive) ในความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์น้อย ภาพของความคิดรวบยอด (Concept Image) ของ นักศึกษามีไม่เพียงพอในการเขียนการพิสูจน์ นักศึกษาไม่มี ความสามารถในการคิดหรือไม่มีความตั้งใจในการคิดและ

ใช้ตัวอย่างเพื่อช่วยในการพิสูจน์นักศึกษาไม่ทราบว่าจะใช้บทนิยามในการแสดงให้เห็นโครงสร้างการพิสูจน์อย่างไร นักศึกษาไม่เข้าใจไม่สามารถใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ นักศึกษาไม่ทราบว่าจะเริ่มต้นการพิสูจน์อย่างไร

จากที่กล่าวมาข้างต้นผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะทำการวิจัยเรื่อง การพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เพื่อพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อสร้างและพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เพื่อพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีสาขาวิชาคณิตศาสตร์

2. เพื่อศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีสาขาวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ระบบจำนวนจริง โดยใช้รูปแบบการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ดังนี้

2.1 เปรียบเทียบความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีสาขาวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ระบบจำนวน โดยใช้รูปแบบการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียน

2.2 เปรียบเทียบความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีสาขาวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ระบบจำนวน โดยใช้รูปแบบการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ระหว่างหลังเรียนกับเกณฑ์ร้อยละ 60

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ใช้ระเบียบการวิจัยเชิงพัฒนา โดยแบ่งการวิจัยเป็น 3 ระยะ ดังนี้

ระยะที่ 1 การสร้างรูปแบบการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

การสร้างรูปแบบการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ มีขั้นตอนการดำเนินการดังนี้

1. ศึกษาแนวคิด ทฤษฎี เกี่ยวกับการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ และการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์จากเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2. สัมภาษณ์เชิงลึกเกี่ยวกับการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของอาจารย์มหาวิทยาลัยที่มีประสบการณ์และความเชี่ยวชาญในการสอนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยมีรายละเอียด ดังนี้

2.1 ประเด็นที่ศึกษา ได้แก่ ขั้นตอนการจัดการเรียนรู้และเทคนิคที่ใช้ในการจัดการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์สำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรีสาขาวิชาคณิตศาสตร์

2.2 กลุ่มเป้าหมายได้แก่อาจารย์มหาวิทยาลัยที่มีประสบการณ์ในการสอนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ไม่น้อยกว่า 10 ปี และมีตำแหน่งทางวิชาการไม่ต่ำกว่าผู้ช่วยศาสตราจารย์ จำนวน 3 ท่าน

2.3 เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ แบบสัมภาษณ์เชิงลึกเกี่ยวกับขั้นตอนการจัดการเรียนรู้และเทคนิคที่ใช้ในการจัดการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์สำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรีสาขาวิชาคณิตศาสตร์

2.4 เก็บรวบรวมข้อมูลโดยใช้การสัมภาษณ์เชิงลึก และบันทึกเทประหว่างการสัมภาษณ์

2.5 วิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้การถอดโปรโตคอล และนำมาสังเคราะห์ขั้นตอนการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

3. สร้างรูปแบบการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยสังเคราะห์มาจากแนวคิดทฤษฎีเกี่ยวกับการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์และการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และผลการวิเคราะห์ขั้นตอนการสอนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของผู้ทรงคุณวุฒิทั้ง 3 ท่าน

ระยะที่ 2 การพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

การพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ มีขั้นตอนการดำเนินการดังนี้

1. นำรูปแบบการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นให้เชี่ยวชาญ ตรวจสอบความถูกต้อง ความเหมาะสม และความเป็นไปได้

1.1 ประเด็นที่ศึกษา ได้แก่ ปรับปรุงรูปแบบการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

1.2 กลุ่มเป้าหมายได้แก่อาจารย์มหาวิทยาลัยที่มีประสบการณ์ในการสอนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ 3 ด้าน ๆ ละ 1 ท่าน ได้แก่ ผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์ด้านคณิตศาสตร์ศึกษา และด้านหลักสูตรและการสอน โดยแต่ละท่านมีผลงานทางวิชาการระดับรองศาสตราจารย์ขึ้นไป

1.3 เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ รูปแบบการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และแบบประเมินรูปแบบการจัดการเรียนรู้ เป็นแบบประเมินระดับความเหมาะสม 5 ระดับ

1.4 เก็บรวบรวมข้อมูลโดยใช้การสัมภาษณ์เชิงลึก และบันทึกเทประหว่างการสัมภาษณ์

1.5 วิเคราะห์ข้อมูลโดยหาค่าเฉลี่ย และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

2. นำรูปแบบการจัดการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มาปรับปรุงตามข้อเสนอแนะของผู้เชี่ยวชาญ

ระยะที่ 3 การทดลองใช้รูปแบบการจัดการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

การทดลองใช้รูปแบบการจัดการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยได้ดำเนินการดังนี้

1. การวิจัยครั้งนี้กำหนดแผนแบบการวิจัยก่อนการทดลอง (Pre-experimental research) โดยมีรูปแบบการทดลอง 1 กลุ่มเปรียบเทียบก่อนและหลังการทดลอง (One group pretest posttest design)

2. กลุ่มตัวอย่าง ได้แก่ นักศึกษาระดับปริญญาตรี ชั้นปีที่ 1 มหาวิทยาลัยราชภัฏนครราชสีมา ที่ลงทะเบียนเรียนวิชาหลักการคณิตศาสตร์ ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2559 จำนวน 30 คนที่ได้มาโดยการเลือกแบบเจาะจง (Purposive sampling)

3. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง และเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล โดยมีรายละเอียดดังนี้

3.1 เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง ได้แก่ แผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้รูปแบบการจัดการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง วิธีพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ จำนวน 4 แผน ๆ ละ 3 คาบ รวม 12 คาบ

3.2 เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล ได้แก่ แบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เป็นข้อทดสอบแบบอัตนัยจำนวน 5 ข้อ หาค่าความยากง่ายและอำนาจจำแนกโดยใช้วิธีของ Whitney และ Sabers โดยมีค่าความยากง่ายระหว่าง ระหว่าง 0.38 - 0.75 ค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.47 - 0.78 และหาค่าความเชื่อมั่นโดยการหาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟาของ Cronbach ซึ่งมีค่าความเชื่อมั่น เท่ากับ 0.84

4. การวิเคราะห์ข้อมูล การศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ของนักศึกษาสาขาวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ระบบจำนวน โดยใช้รูปแบบการจัดการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ใช้สถิติในการวิเคราะห์ข้อมูลได้แก่ ร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสถิติที่ (t-test)

สรุปผลการวิจัย

ผลการวิจัยพบว่า

1. รูปแบบการจัดการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ มี 4 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 ทำความเข้าใจข้อความที่จะพิสูจน์ ดังนี้

1.1 ยกตัวอย่างสิ่งที่เป็นไปตามข้อความที่จะพิสูจน์

1.2 หาตัวอย่างสิ่งที่ไม่เป็นไปตามข้อความที่จะพิสูจน์ ถ้ามีไม่ต้องพิสูจน์ โดยเป็นการยกตัวอย่างค้าน (Disproof by counter example)

1.3 อาจใช้การเขียนแผนภาพประกอบ

ขั้นที่ 2 เขียนประโยคให้อยู่ในรูปประโยคศาสตร์

ขั้นที่ 3 เลือกวิธีพิสูจน์ โดยพิจารณาจากโครงสร้าง

ประโยคตรรกศาสตร์

ขั้นที่ 4 เขียนแสดงบทพิสูจน์ ดังนี้

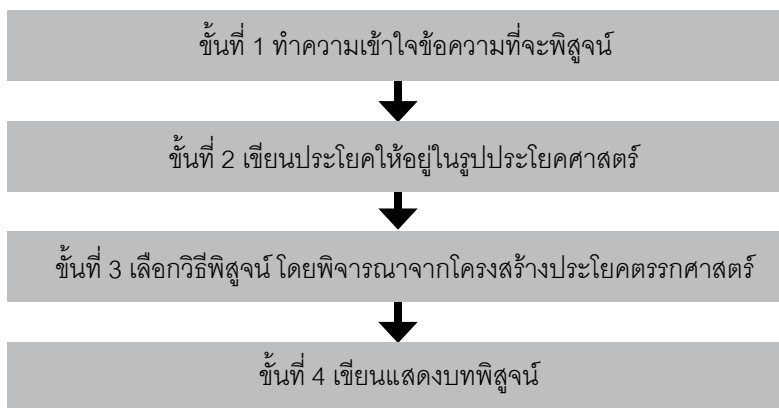
4.1 แสดงสิ่งที่กำหนดให้

4.2 แสดงสิ่งที่จะต้องพิสูจน์

4.3 พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่กำหนดให้กับสิ่งที่จะต้องพิสูจน์

4.4 อาจใช้เทคนิคกระบวนการคิดไปข้างหน้า (The forward process) หรือกระบวนการคิดไปข้างหลัง (The backward process)

รูปแบบการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เขียนเป็นแผนภาพได้ ดังนี้



ผลการประเมินความเหมาะสมขององค์ประกอบของรูปแบบในภาพรวมอยู่ในระดับเหมาะสมมาก ($\bar{X} = 4.33$, S.D. = 0.48)

ข้อที่มีความเหมาะสมในระดับมากที่สุด ได้แก่

1) ขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ตามรูปแบบมีความสอดคล้องกับทฤษฎีและแนวคิดพื้นฐานของการจัดการเรียนรู้และการสัมภาษณ์ถอดประสบการณ์สอนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของผู้ทรงคุณวุฒิทางคณิตศาสตร์ ($\bar{X} = 4.67$, S.D. = 0.58) 2) ขั้นตอนเลือกวิธีพิสูจน์โดยพิจารณาจากโครงสร้างประโยคตรรกวิทยามีความเหมาะสม ($\bar{X} = 4.67$, S.D. = 0.58) 3) ขั้นตอนการจัดการเรียนรู้สามารถทำให้ผู้เรียนบรรลุจุดมุ่งหมายได้ ($\bar{X} = 4.67$, S.D. = 0.58) และ 4) ผลที่คาดว่าจะได้รับมีความเหมาะสม ($\bar{X} = 4.67$, S.D. = 0.58)

ข้อที่มีความเหมาะสมมาก ได้แก่ หลักการของรูปแบบมีความสอดคล้องกับทฤษฎีและแนวคิดพื้นฐานของการจัดการเรียนรู้และการสัมภาษณ์ถอดประสบการณ์สอนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของผู้ทรงคุณวุฒิทางคณิตศาสตร์ ($\bar{X} = 4.33$, S.D. = 0.58) 2) ขั้นตอนเขียนประโยคให้อยู่ในรูปตรรกวิทยามีความเหมาะสมมาก ($\bar{X} = 4.33$, S.D. = 0.58) 3) ขั้นตอนแสดงบทพิสูจน์มีความเหมาะสมที่จะทำให้ผู้เรียนสามารถเขียนบทพิสูจน์ได้ ($\bar{X} = 4.33$, S.D. = 0.58) 4) การนำรูปแบบไปใช้มีความเหมาะสม

($\bar{X} = 4.33$, S.D. = 0.58) 5) ขั้นทำความเข้าใจข้อความทางคณิตศาสตร์ที่จะพิสูจน์มีความเหมาะสมที่จำทำให้ผู้เรียนเข้าใจข้อความเป็นอย่างดี ($\bar{X} = 4.00$, S.D. = 0.00) และ 6) การวัดและประเมินผลการเรียนรู้สอดคล้องกับจุดมุ่งหมาย ($\bar{X} = 4.00$, S.D. = 0.00)

2. ผลการศึกษาศักยภาพในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาศาสาวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ระบบจำนวน พบว่า

2.1 คะแนนเฉลี่ยก่อนเรียน เท่ากับ 8.43 (ร้อยละ 33.73) คะแนนเฉลี่ยหลังเรียน เท่ากับ 16.27 (ร้อยละ 65.07)

2.2 ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการพิสูจน์ของนักศึกษาศาสาวิชาคณิตศาสตร์ วิชาหลักการคณิตศาสตร์ เรื่อง ระบบจำนวนจริง โดยใช้รูปแบบการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ พบว่าหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

2.3 ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการพิสูจน์ของนักศึกษาศาสาวิชาคณิตศาสตร์ วิชาหลักการคณิตศาสตร์ เรื่อง ระบบจำนวนจริง โดยใช้รูปแบบการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ พบว่าหลังเรียนสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

อภิปรายผล

จากผลการวิจัย เรื่อง การพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เพื่อพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์สามารถอภิปรายผลได้ ดังนี้

1. รูปแบบการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ มี 4 ขั้นตอน ได้แก่ ขั้นที่ 1 ทำความเข้าใจข้อความที่จะพิสูจน์ ขั้นที่ 2 เขียนประโยคให้อยู่ในรูปประโยคศาสตร์ ขั้นที่ 3 เลือกวิธีพิสูจน์ โดยพิจารณาจากโครงสร้างประโยคตรรกศาสตร์และขั้นที่ 4 เขียนแสดงบทพิสูจน์ ซึ่งผลการประเมินความเหมาะสมขององค์ประกอบของรูปแบบในภาพรวมอยู่ในระดับเหมาะสมมาก ($\bar{X} = 4.33$) ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากรูปแบบการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ถูกถอดมาจากประสบการณ์การสอนพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของผู้ทรงคุณวุฒิ โดยแต่ละท่านมีประสบการณ์การสอนไม่น้อยกว่า 10 ปี บางท่านมีประสบการณ์การสอนมากกว่า 30 ปี สอดคล้องกับแนวคิดของ Jonassen (1992, pp. 138-139) ที่กล่าวว่า การสร้างความรู้จะให้ความสำคัญกับกระบวนการและวิธีการของบุคคลในการสร้างความรู้ ความเข้าใจจากประสบการณ์ สอดคล้องกับแนวคิดของ Ausubel (1972) ที่กล่าวว่า ผู้เรียนต้องสามารถเชื่อมโยงระหว่างมโนทัศน์ใหม่กับมโนทัศน์เดิม ทั้งสามารถแยกองค์ประกอบของปัญหา วิเคราะห์ความสัมพันธ์ของสิ่งที่จำเป็นและจัดระบบความรู้มาใช้ในการแก้ปัญหา สอดคล้องกับข้อเสนอแนะของ Gustafson and Frisk (1991, pp.64-65) ที่เสนอแนะว่า การพิสูจน์ต้องอ่านทฤษฎีบทอย่างรอบคอบ ทำความเข้าใจคำแต่ละคำ เขียนสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องพิสูจน์ และยังคงสอดคล้องกับแนวคิดของ Bittinger (1972, pp.75-79) ที่เสนอเทคนิคการพิสูจน์ว่า ควรเขียนรูปข้อความที่จะพิสูจน์ให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ ใช้การลองผิดลองถูก ใช้วิธีคิดแบบไปข้างหน้าและวิธีคิดแบบย้อนกลับ นอกจากนี้ยังสอดคล้องกับงานวิจัยของ Moore (1990) ที่ได้ทำการวิจัยเรื่องปัญหาในการเรียนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับมหาวิทยาลัย ซึ่งพบว่านักศึกษามีปัญหาเกี่ยวกับขั้นตอนการพิสูจน์ การใช้สัญลักษณ์ไปสู่การพิสูจน์ และการเริ่มต้นการพิสูจน์

2. ผลการศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาคณิตศาสตร์ เรื่อง ระบบจำนวน พบว่าคะแนนเฉลี่ยก่อนเรียน เท่ากับ 8.43 (ร้อยละ 33.73) คะแนนเฉลี่ยหลังเรียน เท่ากับ 16.27 (ร้อยละ 65.07) ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการพิสูจน์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และผลการเปรียบเทียบความสามารถในการพิสูจน์หลังเรียนสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากรูปแบบการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มีขั้นตอนที่ทำให้เกิดความเข้าใจได้ง่าย เพราะรู้เข้าใจในสิ่งที่จะพิสูจน์ ทราบสิ่งที่กำหนดให้ สิ่งที่จะต้องพิสูจน์ รูปประโยคอยู่ในรูปประโยคตรรกวิทยา สามารถเลือกวิธีพิสูจน์จากที่เคยเรียนมาแล้วได้อย่างถูกต้อง และสามารถใช้เทคนิคการพิสูจน์ช่วยในการเขียนบทพิสูจน์ได้ สอดคล้องกับ ยุพิน พิพิธกุล (2545, น.11-12) ที่กล่าวว่า หลักการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ควรเริ่มจากเรื่องง่ายไปสู่ยาก เปลี่ยนจากรูปธรรมไปสู่นามธรรม คำนึงประสบการณ์เดิม สอดคล้องกับ พรรณทิพย์ ม้ามณี (2520) ที่กล่าวว่า อ่านข้อความให้ละเอียดและแยกแยะสิ่งที่กำหนดให้ และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ รูปที่เขียนพยายามให้ชัดเจนเพื่อง่ายแก่การพิสูจน์ เลือกวิธีการที่เหมาะสม เขียนให้ง่าย สั้น และชัดเจน นอกจากนี้ยังสอดคล้องกับงานวิจัยของ จำเริญ อนันตรธรรมรส (2553) ที่ใช้โมเดลเฟสเมทอดคอมบิเนชันในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่มีผลผลความคิดทางเรขาคณิตและความสามารถในการเขียนพิสูจน์

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะเพื่อนำผลการวิจัยไปใช้

1.1 การนำรูปแบบการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ไปให้ผู้สอนควรทำความเข้าใจเกี่ยวกับขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ทั้ง 4 ขั้นตอน และวางแผนการสอนล่วงหน้า

1.2 การนำรูปแบบการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ไปให้ผู้สอนจะต้องตรวจสอบว่านักศึกษามีพื้นฐานเกี่ยวกับวิธีพิสูจน์มาก่อน

1.3 การนำรูปแบบการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ไปใช้ในระยะแรกๆ ผู้สอนจะต้องแสดงตามขั้นตอนทั้ง 4 ขั้นตอน เพื่อให้ให้นักศึกษาเกิดความเข้าใจและสรุปว่าส่วนใดเป็นบทพิสูจน์ที่แสดง

1.4 ควรนำรูปแบบการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ไปใช้กับเนื้อหาอื่นที่เกี่ยวกับการพิสูจน์

2. ข้อเสนอแนะในการวิจัยครั้งต่อไป

2.1 ควรมีการพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์โดยมีการศึกษาความสามารถด้านอื่นๆ เพิ่มเติม เช่น การให้เหตุผล การเชื่อมโยง

2.2 ควรมีการพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์โดยใช้ระเบียบวิธีวิจัยเชิงคุณภาพเพื่อศึกษากระบวนการสร้างความรู้ของผู้เรียน

เอกสารอ้างอิง

- ขจรศรี วรรณสถิต. (2544). ปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ระดับปริญญาตรี. (วิทยานิพนธ์ มหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช).
- วัชร น้อยมี. (2551). การพัฒนาชุดการเรียนรู้การสอนแบบสืบสวนสอบสวน เรื่อง การให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลของผู้เรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 (วิทยานิพนธ์ มหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ).
- พรธนทิพย์ ม้ามณี. (2520). การสอนคณิตศาสตร์แนวใหม่ระดับมัธยมศึกษา. กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- ยุพิน พิพิธกุล. (2545). การสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ. (2542). พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์พรทิทกานการพิมพ์.
- สำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา. (2555). มาตรฐานคุณวุฒิระดับปริญญาตรี สาขาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ พ.ศ. 2554. กรุงเทพฯ: เอกสารแนบท้ายประกาศกระทรวงศึกษาธิการ.
- สำนักปลัดกระทรวงศึกษาธิการ. (2554). แผนพัฒนาการศึกษาระยะที่ 11 (พ.ศ.2555-2559). กรุงเทพฯ: สำนักปลัดกระทรวงศึกษาธิการ.
- Ausubel, D. P. (1972). *The psychology of meaningful Verbal Learning*. New York: Gruner & Stratton.
- Bittinger, M. L. (1972). *Logic and proof*. Massachusetta: Addison-Wesley.
- Dreyfus, T. (1999). Euclid may stay and even be taught. In Lindquist, M. M. and A. P. Shulte (Eds.), *Learning and Teaching Geometry, K-12*, pp. 47-58.
- Gustafson, R. D. & Frisk, P. D. (1991). *Elementary geometry*. 3rd ed. New York: John Wiley & Sons.
- Harel, G. & Solow, L. (2007). Students' proof schemes: results from exploratory studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput, and Dubinsky. (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education, III*, pp. 234-283.
- Harel, G. & Rabin, J. M. (2010). Teaching practice associated with the authoritative proof schemes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41, p. 14.
- Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, pp. 396-428.
- Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), pp. 389-399.
- Jahnke, H. N. (2007). Proofs and hypotheses. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 39, pp. 79-86.
- Jonassen, D. H. (1992). Evaluating constructivist learning. In T.M. Duffy (Ed), *Constructivism and the Technology of Instruction*, pp. 137-147.

- Markel, W. D. (1994). The role of proof in mathematics education. *School Science and Mathematics*, 94(6), pp. 291-295.
- Moore, R. C. (1990). *College students' difficulties in learning to do mathematical proof*. (Doctoral dissertation, The University of Georgia).
- NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Saeed, R. M. (1997). An exploratory study of college students' understanding of mathematical proof and relationship of this understanding to their attitude toward mathematics. *Dissertation Abstract*, 57(10), pp. 4300-A.
- Solow, D. (2002). *How to read and do proofs*. 3rd ed. New York: John Wiley & Sons.