

การศึกษาองค์ประกอบของความรู้ของอาจารย์ ในการจัดการเรียนรู้ เรื่อง การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

A Study Factor of Teacher's Knowledge for Learning Mathematics Management in Mathematical Proof

นฤเบศ ลาภยิγγยง^{1,*}, ยุพิน พิพิธกุล², ชาญณรงค์ เฮียงราช²
Narubet Lapyingyong^{1,*}, Yupin Phiphitthakun², Channarong Heingraj²

ABSTRACT

The research aimed to study a necessary factor of teacher's knowledge for management of teaching and learning mathematical proof of university mathematics instructors by using the research and development. The research was divided into three stages which were stage1) the study of factors concerning mathematical proof learning management by synthesizing theories and related research, stage 2) the development factors of teacher's knowledge for teaching and learning mathematical proof by using means of a focus group which consisted of 3 groups of participates: (1) mathematics instructor, (2) mathematics educators, and (3) students who had enrolled the mathematical proof. These participants were selected by using the special criteria and voluntarily participated and stage 3)the confirmation of 3 developed factors obtained from the stage 2, namely, mathematical content knowledge, pedagogical knowledge, and knowledge of learners cognition in mathematics. These factors were used to construct a rating-scale questionnaire with 56 items and were administered to 260 mathematics instructors who taught the mathematical proof. The data were analyzed by using the confirmatory factor analysis.

The major findings of the research revealed that 3 main factors for mathematical proof instruction were pedagogical knowledge, which consisted of curricular knowledge, instructional knowledge, and measurement and evaluation knowledge. Mathematical content knowledge consisted of common content knowledge, specialized content knowledge, and knowledge at the mathematical horizon. Also, knowledge of learners' cognition in mathematics consisted of representations concept of mathematical proof, and constructing and understanding of mathematical concepts.

Keywords: teacher's knowledge, learning management, mathematical proof

¹ นักศึกษาปริญญาเอก สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม มหาสารคาม 44000
Ed.d. Student in Mathematics Education Program, Rajabhat Maha sarakham University,
Maha sarakham 44000, Thailand.

² คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม มหาสารคาม 44000
Faculty of Education, Rajabhat Maha sarakham University, Maha sarakham 44000, Thailand.

* Corresponding author, e-mail: l.narubet@gmail.com

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาองค์ประกอบของความรู้ที่จำเป็นในการจัดการเรียนรู้เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของอาจารย์ระดับมหาวิทยาลัย โดยใช้การวิจัยเชิงพัฒนา การวิจัยแบ่งออกเป็น 3 ระยะ ระยะที่ 1 ศึกษาองค์ประกอบของความรู้ของอาจารย์ในการจัดการเรียนรู้เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์โดยการสังเคราะห์แนวคิด ทฤษฎีจากเอกสาร ตำรา และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ระยะที่ 2 พัฒนางค์ประกอบของความรู้ของอาจารย์ในการจัดการเรียนรู้เรื่องการพิสูจน์ โดยการสนทนากลุ่มและใช้วิธีฉันทามติแบบพหุลักษณะ ผู้เข้าร่วมสนทนากลุ่มประกอบด้วยผู้ทรงคุณวุฒิทางคณิตศาสตร์ จำนวน 4 ท่าน ผู้ทรงคุณวุฒิทางคณิตศาสตร์ศึกษา จำนวน 3 ท่าน และนักศึกษาระดับบัณฑิตศึกษาที่เคยศึกษาเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ จำนวน 5 ท่าน และระยะที่ 3 การยืนยันองค์ประกอบของความรู้ของอาจารย์ในการจัดการเรียนรู้เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ที่ได้จากระยะที่ 2 เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยคือ แบบสอบถามองค์ประกอบของความรู้ของอาจารย์ในการจัดการเรียนรู้เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยนำแบบสอบถามซึ่งประกอบด้วย 3 องค์ประกอบหลัก คือ ความรู้ด้านเนื้อหา ความรู้ด้านการจัดการเรียนรู้ และความรู้ด้านการเรียนรู้ของผู้เรียน มีทั้งหมด 56 ข้อ ไปทดสอบกับอาจารย์ที่สอนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ในมหาวิทยาลัยราชภัฏ จำนวน 260 คน ที่ได้จากการสุ่มแบบแบ่งชั้นในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2556 แล้วนำผลที่ได้ไปวิเคราะห์องค์ประกอบเชิงยืนยัน (Confirmatory Factor Analysis)

ผลการวิจัยพบว่า องค์ประกอบหลักที่จำเป็นในการในการจัดการเรียนรู้เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ได้แก่ ความรู้ด้านการจัดการเรียนรู้ ประกอบด้วยองค์ประกอบรอง ได้แก่ ความรู้ในหลักสูตรคณิตศาสตร์ ความรู้ในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ และความรู้ในการวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ความรู้ด้านเนื้อหา ประกอบด้วยองค์ประกอบรอง ได้แก่ ความรู้ในเนื้อหาพร้อม ความรู้ในเนื้อหาเฉพาะ และความรู้ในขอบข่ายทางคณิตศาสตร์ และความรู้ด้านการเรียนรู้ของผู้เรียน ประกอบด้วยองค์ประกอบรอง ได้แก่ ความรู้ในการแสดงมโนทัศน์การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และความรู้ในการสร้างมโนทัศน์

คำสำคัญ : ความรู้ของอาจารย์ การจัดการเรียนรู้ การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

บทนำ

พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พุทธศักราช 2542 มีความมุ่งหมายที่จะพัฒนาคนไทยให้มีความรู้และทักษะด้านคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี ให้เป็นมนุษย์ที่สมบูรณ์ทั้งร่างกาย จิตใจ สติปัญญา ความรู้ และคุณธรรมจริยธรรม (สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ. 2542 : 12-13) คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดของมนุษย์และความเจริญก้าวหน้าของโลก มนุษย์ใช้คณิตศาสตร์เป็นพื้นฐานในการศึกษาวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และศาสตร์อื่นๆ รวมทั้งใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการพัฒนาการคิดที่หลากหลาย ทั้งการคิดวิเคราะห์ คิดอย่างเป็นเหตุเป็นผล คิดอย่างมีวิจารณญาณ และคิดอย่างเป็นระบบและระเบียบแบบแผน ลักษณะการคิดดังกล่าวทำให้มนุษย์สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ และ

แก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2554 : 1)

การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ถือว่าเป็นหัวใจสำคัญในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ดังที่ Hersh (1993 : 392) ได้กล่าวว่านักคณิตศาสตร์ให้ความสนใจต่อการพิสูจน์มากกว่าคุณค่าของผลลัพธ์ และถือว่าการพิสูจน์เป็นสิ่งจำเป็นจะละเว้นเสียมิได้ สอดคล้องกับ Markel (1994 : 291-295) ที่กล่าวว่า การพิสูจน์เป็นหัวใจสำคัญของคณิตศาสตร์ การสร้างทฤษฎีบท และการพิสูจน์ทฤษฎีบทเป็นหน้าที่ของนักคณิตศาสตร์ ส่วน Solow (2002 : 1) กล่าวถึง จุดมุ่งหมายที่สำคัญอย่างหนึ่งของนักคณิตศาสตร์ก็คือ การค้นหาความจริงทางคณิตศาสตร์และสื่อสารความจริงนั้นผ่านบทพิสูจน์ด้วยภาษาคณิตศาสตร์ แต่ผลการวิจัยพบว่าความเข้าใจเรื่องการพิสูจน์นั้นเป็นเรื่องยากสำหรับ

ผู้เรียน Fennema และ Franke (1992 : 162) กล่าวว่า ครูจึงเป็นบุคคลสำคัญและความรู้ของครูมีอิทธิพลต่อโอกาสการเรียนรู้ของนักเรียน สอดคล้องกับ ประเวศ วะสี (2543 : ก) ที่กล่าวว่า ครูถือเป็นหัวใจสำคัญของการปฏิรูปการเรียนรู้

ในปี 1985 Shulman ได้เรียกร้องให้เกิดการทำวิจัยเกี่ยวกับความรู้สำหรับการสอนมากขึ้น โดยเขาได้บรรยายผลงานที่ชื่อว่า "Those who understand: Knowledge growth in teaching" ในการประชุมวิชาการประจำปีของสมาคมวิจัยทางการศึกษาของประเทศสหรัฐอเมริกา (The 1985 Annual Meeting of the American Educational Research Association) และได้เสนอว่าสิ่งที่ขาดหายไปจากกระบวนทัศน์ (Missing paradigm) ที่เกี่ยวกับการวิจัยทางการศึกษาและการศึกษาเกี่ยวกับการสอน ก็คือความรู้ของครู

จากที่กล่าวมาข้างต้นผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะศึกษาองค์ประกอบของความรู้ของอาจารย์ในการจัดการเรียนรู้เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อศึกษาองค์ประกอบของความรู้ที่จำเป็นในการจัดการเรียนรู้ เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ของอาจารย์ระดับมหาวิทยาลัย

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ใช้ระเบียบการวิจัยเชิงพัฒนา โดยแบ่งการวิจัยเป็น 3 ระยะ ดังนี้

ระยะที่ 1 ศึกษาองค์ประกอบของความรู้ของอาจารย์ในการจัดการเรียนรู้เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยการสังเคราะห์แนวคิด ทฤษฎี จากเอกสาร ตำราและงานวิจัยต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง

ระยะที่ 2 พัฒนาองค์ประกอบของความรู้ของอาจารย์ในการจัดการเรียนรู้เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยการสนทนากลุ่มและใช้วิธีจันทามติแบบพหุลักษณะ ผู้เข้าร่วมสนทนากลุ่มประกอบด้วย ผู้ทรงคุณวุฒิทางคณิตศาสตร์ จำนวน 4 ท่าน ผู้ทรงคุณวุฒิทาง

คณิตศาสตร์ศึกษา จำนวน 3 ท่าน และนักศึกษาคณะศึกษาศาสตร์ ที่เคยศึกษาเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ จำนวน 5 ท่าน

ระยะที่ 3 ยืนยันองค์ประกอบของความรู้ของอาจารย์ในการจัดการเรียนรู้เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้การวิเคราะห์องค์ประกอบเชิงยืนยัน

ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

1. ประชากร ได้แก่ อาจารย์สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏทั่วประเทศ ที่ปฏิบัติงานในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2556 จำนวน 400 คน

2. กลุ่มตัวอย่าง ได้แก่ อาจารย์สาขาวิชาคณิตศาสตร์มหาวิทยาลัยราชภัฏทั่วประเทศ ที่ปฏิบัติงานในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2556 จำนวน 260 คน ที่ได้จากการสุ่มแบบแบ่งชั้นโดยแบ่งตามสภาพภูมิศาสตร์

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล ได้แก่ แบบสอบถามองค์ประกอบของความรู้ของอาจารย์ในการจัดการเรียนรู้เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เป็นแบบสอบถามแบบมาตราส่วนประมาณค่า แบ่งเป็น 5 ระดับ จำนวน 56 ข้อ มีค่าความเชื่อมั่น .985 เป็นแบบสอบถามสำหรับการวิเคราะห์องค์ประกอบเชิงยืนยัน

การวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลผู้วิจัยวิเคราะห์องค์ประกอบเชิงยืนยันด้วยโปรแกรม LISREL 8.72

สรุปผลการวิจัย

ผลการวิจัยพบว่า ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ขององค์ประกอบของความรู้ของอาจารย์ในการจัดการเรียนรู้เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มีความสัมพันธ์กันอย่างน้อยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 โดยค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ขององค์ประกอบมีค่าระหว่าง .426 ถึง .844 ค่า Bartlett's Test of Sphericity มีค่าเท่ากับ 3,821.018, $df = 105$, $p = .000$ แสดงว่า เมทริกซ์สหสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบแตกต่างจากเมทริกซ์เอกลักษณ์อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และค่าดัชนี Kaiser-Meyer-Olkin Measure of Sampling Adequacy = .954

แสดงว่าองค์ประกอบมีความสัมพันธ์กันเหมาะสมดี สามารถนำไปวิเคราะห์องค์ประกอบได้ นอกจากนี้ค่าดัชนีความสอดคล้องกลมกลืนระหว่างองค์ประกอบกับข้อมูลเชิงประจักษ์ได้ค่าไค-สแควร์ เท่ากับ 30.46 ($p = 0.98$) ที่องศาอิสระ 50 ค่า RMSEA เท่ากับ .000 หมายความว่าองค์ประกอบตามกรอบแนวคิดในการวิจัยครั้งนี้สอดคล้องกลมกลืนกับข้อมูลเชิงประจักษ์ดีมาก สรุปได้ว่า

องค์ประกอบหลักของความรู้ของอาจารย์ในการจัดการเรียนรู้เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ มีค่าน้ำหนักองค์ประกอบเรียงลำดับจากมากไปน้อย ได้แก่ ความรู้ด้านการจัดการเรียนรู้ ความรู้ด้านเนื้อหา และความรู้ด้านการเรียนรู้ของผู้เรียน โดยมีค่าน้ำหนักองค์ประกอบ .95, .92 และ .85 ตามลำดับ

องค์ประกอบความรู้ด้านการจัดการเรียนรู้ มีค่าน้ำหนักองค์ประกอบรองเรียงลำดับจากมากไปน้อย ได้แก่ ความรู้ในหลักสูตรคณิตศาสตร์ ความรู้ในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ และ ความรู้ในการวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โดยมีค่าน้ำหนักองค์ประกอบ .95, .82 และ .74 ตามลำดับ

องค์ประกอบความรู้ด้านเนื้อหา มีค่าน้ำหนักองค์ประกอบรองเรียงลำดับจากมากไปน้อย ได้แก่ ความรู้ในเนื้อหาร่วม ความรู้ในเนื้อหาเฉพาะ และความรู้ในขอบข่ายทางคณิตศาสตร์ โดยมีค่าน้ำหนักองค์ประกอบ .91, .83 และ .79 ตามลำดับ

องค์ประกอบความรู้ด้านการเรียนรู้ของผู้เรียน มีค่าน้ำหนักองค์ประกอบรองเรียงลำดับจากมากไปน้อย ได้แก่ ความรู้ในการแสดงมโนทัศน์การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และความรู้ในการสร้างมโนทัศน์และความเข้าใจมโนทัศน์การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยมีค่าน้ำหนักองค์ประกอบ .95 และ .88 ตามลำดับ

อภิปรายผล

จากผลการวิจัย เรื่องการศึกษาองค์ประกอบของความรู้ของอาจารย์ในการจัดการเรียนรู้เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์พบว่า องค์ประกอบของความรู้ของอาจารย์ที่จำเป็นในการจัดการเรียนรู้เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

มีน้ำหนักองค์ประกอบเรียงลำดับจากมากไปน้อย ได้แก่ ความรู้ด้านการจัดการเรียนรู้ ความรู้ด้านเนื้อหา และความรู้ด้านการเรียนรู้ของผู้เรียน ผลการวิจัยสามารถอภิปรายผลได้ดังนี้

การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ถือว่าเป็นหัวใจสำคัญในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ Hersh (1993 : 392) กล่าวว่า นักคณิตศาสตร์ให้ความสนใจต่อการพิสูจน์มากกว่าคุณค่าของผลลัพธ์ และถือว่าการพิสูจน์เป็นสิ่งจำเป็นจะละเว้นเสียมิได้ สอดคล้องกับ Markel (1994 : 291-295) ที่กล่าวว่า การพิสูจน์เป็นหัวใจสำคัญของคณิตศาสตร์ การสร้างทฤษฎีบท และการพิสูจน์ทฤษฎีบท เป็นหน้าที่ของนักคณิตศาสตร์ ส่วน Solow (2002 : 1) กล่าวว่า จุดมุ่งหมายที่สำคัญอย่างหนึ่งของนักคณิตศาสตร์ ก็คือ การค้นหาความจริงทางคณิตศาสตร์ และสื่อสารความจริงนั้นผ่านบทพิสูจน์ด้วยภาษาคณิตศาสตร์ เนื่องจากภาษาคณิตศาสตร์มีความสำคัญอย่างหนึ่งคือ ความถูกต้องแม่นยำ บทพิสูจน์ที่ดีควรจะถูกนำเสนออย่างเป็นขั้นเป็นตอน Saeed (1997 : 4300-A) กล่าวว่า ความสามารถในการพิสูจน์ และความเข้าใจในธรรมชาติของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ รวมทั้งเทคนิควิธีในการพิสูจน์เป็นองค์ประกอบในการวิเคราะห์ที่สำคัญในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ผู้เรียนจะต้องอ่านทำความเข้าใจวิเคราะห์การพิสูจน์แสดงความคิดเห็น และเขียนแสดงการพิสูจน์เองได้อีกทั้งต้องเข้าใจและเห็นคุณค่าของการพิสูจน์ด้วย การพิสูจน์เป็นลำดับทางตรรกศาสตร์ของประโยค โดย เริ่มต้นจากการใช้ สมมติฐาน บทนิยาม หรือสัจพจน์สิ่งที่พิสูจน์มาแล้ว และการให้เหตุผล (Moore. 1991 : 51) ที่พร้อมจะเปิดให้มีการวิพากษ์วิจารณ์ได้ (Rodd. 2000 : 232) ในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์นั้นจำเป็นต้องมีเทคนิคที่ช่วยในการพิสูจน์ซึ่งเทคนิคหนึ่งก็คือ การเปลี่ยนรูปข้อความที่จะพิสูจน์ให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ทางตรรกศาสตร์ หรืออาจนำแนวคิดหรือวิธีการพิสูจน์จากทฤษฎีบทที่ได้พิสูจน์มาแล้วเป็นแนวทางในการพิสูจน์ เทคนิคการพิสูจน์มีหลายวิธี เช่น การเปลี่ยนรูปข้อความที่จะพิสูจน์ให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ (Translate to Logical Symbolism) การอุปมา (Analogy) วิธีคิดแบบย้อนกลับ (Working Backwards) วิธีการลองผิดลองถูก

(Do-something Approach, Trial and Error) การใช้ขั้นตอนในการพิสูจน์ (Use of Definition) การใช้ทฤษฎีบทที่มีมาก่อนหรือที่พิสูจน์มาแล้ว (Use Previously Proved Theorem) (Bittinger. 1972 : 75-79) จะเห็นว่าการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์จะมีลักษณะของเนื้อหาที่แตกต่างจากคณิตศาสตร์แขนงอื่น การจัดการเรียนรู้การพิสูจน์จึงจำเป็นต้องใช้ทั้งศาสตร์และศิลป์ จากการวิจัยที่ผ่านมาพบว่า ยังมีผู้เรียนจำนวนมากที่มีปัญหาในการอ่านและเขียนการพิสูจน์ หลายคนมีความคิดรวบยอดที่ผิดเกี่ยวกับการพิสูจน์และเทคนิคในการพิสูจน์ซึ่งเป็นสิ่งขัดขวางความสามารถในการเขียนการพิสูจน์ของนักศึกษา ดังนั้นการจัดการเรียนรู้ของอาจารย์จะต้องมีความเข้าใจในหลักสูตร เพราะจะเป็นแนวทางช่วยให้รู้รายละเอียดของเนื้อหาและพฤติกรรมที่ควรปลูกฝังผู้เรียน นอกจากนั้น หลักการ ทักษะ และเทคนิคการจัดการเรียนรู้การพิสูจน์ นวัตกรรมจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตลอดจน หลักการและจุดมุ่งหมายของการวัดผลและประเมินผล และการสร้างเครื่องมือการวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์ จึงเป็นองค์ประกอบสำคัญของความรู้ของครูในการจัดการเรียนรู้ อันจะส่งผลถึงผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของผู้เรียนด้วย ซึ่งสอดคล้องกับแนวคิดของ Barker (2007 : 29) ที่กล่าวว่า ครูสามารถใช้ความรู้ตัดสินใจในการจัดการเรียนรู้ และความรู้ของครูจะส่งผลโดยตรงต่อความรู้ของผู้เรียน และสอดคล้องกับผลการวิจัยของ โกมล ไผสาล (2549 : 1) ที่ได้ทำการศึกษาปัจจัยเชิงสาเหตุที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษาโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรี มหาวิทยาลัยราชภัฏกลุ่มรัตนโกสินทร์ ที่พบว่า คุณภาพการสอนของครูเป็นสาเหตุโดยตรงต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษา และ มณิกา เรืองสินชัยวานิช (2552 : 1) ได้ทำการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ของครูกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ที่พบว่า คุณภาพการสอน ของครูเป็นสาเหตุโดยตรงต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน องค์ประกอบของความรู้ของอาจารย์ที่จำเป็นในการจัดการเรียนรู้เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มีน้ำหนักน้อยกว่า ความรู้ด้านการจัดการเรียนรู้ คือ ความรู้ด้านเนื้อหา ซึ่ง Welder (2007 : 4) ได้กล่าวว่า ครูจะต้องมีความรู้ในเนื้อหาเฉพาะทุกอย่าง

จำเป็นที่จะทำให้การเรียนการสอนคณิตศาสตร์มีประสิทธิภาพ เช่นเดียวกับ ปิยวดี วงษ์ใหญ่ (2551 : 80) ที่ได้กล่าวว่า ผู้สอนต้องมีความเข้าใจเนื้อหาคณิตศาสตร์ในเรื่องนั้นๆ อย่างลึกซึ้ง และเห็นความสัมพันธ์ระหว่างตัวแทนแนวคิดที่อยู่ในแบบต่างๆ ผลการวิจัยพบว่า ความรู้ในเนื้อหาพร้อม ซึ่งเป็นความรู้ที่จะช่วยให้ ผู้เรียนสามารถแสดงการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ได้มีน้ำหนักองค์ประกอบมากที่สุดทั้งนี้อาจเป็นเพราะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ต้องแปลงข้อความที่จะพิสูจน์ให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ทางตรรกศาสตร์ ดำเนินการพิสูจน์จากเหตุหรือสมมติฐานไปสู่สิ่งที่ต้องการพิสูจน์หรือผลสรุป หรือดำเนินการจากสิ่งที่ต้องการพิสูจน์กลับมาหาเหตุหรือสมมติฐานสอดคล้องกับแนวคิดของ Bittinger (1972 : 75-79) และ สุเทพ ทองอยู่ (2533 : 11) ที่ได้เสนอเทคนิคที่ช่วยในการพิสูจน์ว่าได้แก่ การเปลี่ยนรูปของข้อความที่จะพิสูจน์ให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ วิธีการลองผิดลองถูก วิธีคิดแบบไปข้างหน้า และวิธีคิดแบบย้อนกลับ จะช่วยให้ผู้เรียนสามารถแสดงการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ได้ ความรู้เหล่านั้น ได้แก่ เทคนิคการพิสูจน์ ตรรกศาสตร์และการให้เหตุผล และปรัชญา ธรรมชาติและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์นอกจากนั้น ความรู้ในเนื้อหาเฉพาะ ซึ่งเป็นความรู้เกี่ยวกับข้อเท็จจริง แนวคิด หลักการ กฎ ทฤษฎี และสมมติฐาน เพื่อครูนำไปใช้ในการจัดการเรียนรู้เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มีน้ำหนักองค์ประกอบรองลงมา ทั้งนี้อาจเป็นเพราะความรู้ในเนื้อหาเฉพาะนั้นคือวิธีพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งมีอยู่มีหลายวิธี เช่น การพิสูจน์ข้อความในรูปประโยคแบบมีเงื่อนไข การพิสูจน์ในรูปประโยคแบบเงื่อนไขสองทาง การพิสูจน์โดยการแจกแจง การพิสูจน์ข้อความเลือก การพิสูจน์โดยการแย้ง การพิสูจน์การมีอยู่และการพิสูจน์ความเป็นได้อย่างเดียว การพิสูจน์ว่าไม่มี การพิสูจน์ว่าเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้าน และการพิสูจน์โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ อาจารย์ที่มีความรู้ความเข้าใจในข้อเท็จจริงเกี่ยวกับวิธีพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์จะทำให้การจัดการเรียนรู้เป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพ ซึ่งสอดคล้องกับ รอคคอฟฟ์ และคนอื่นๆ (Rockoff and others. 2009 : 48) กล่าวถึงประสิทธิภาพของครูว่า ครูจะต้องมีความรู้ในเนื้อหาเฉพาะ

และ Woolfolk (2007 : 486-487) ที่กล่าวว่า ครูที่มีประสิทธิภาพจะต้องมีความรู้ในข้อเท็จจริงเกี่ยวกับวิชาที่สอนอย่างชัดเจนสำหรับความรู้ในขอบข่ายทางคณิตศาสตร์เป็นความรู้ตามลำดับของเนื้อหาที่สอดคล้องกับธรรมชาติของคณิตศาสตร์มีน้ำหนักองค์ประกอบน้อยที่สุด ทั้งนี้อาจเป็นเพราะเป็นความรู้ในเนื้อหาที่ใช้เป็นตัวแบบการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ได้แก่ เซต ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน และทฤษฎีจำนวน ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของ Moore (1990) ที่ได้ทำการวิจัย เรื่องปัญหาในการเรียนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับมหาวิทยาลัย โดยมีคำถามการวิจัยคือ อะไรคือธรรมชาติและที่มาของปัญหาในการเรียนรู้ที่จะอ่านและทำการพิสูจน์ของนักศึกษาในบทเรียนแรกของการเรียน การพิสูจน์ และได้บรรจุบทเรียนที่ประกอบด้วย เทคนิคการพิสูจน์ ทฤษฎีเซต ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน และระบบจำนวนจริง สำหรับ ความรู้ด้านการเรียนรู้ของผู้เรียน ซึ่งมีน้ำหนักองค์ประกอบน้อยที่สุดนั้น Grouws (1992 : 159-160) กล่าวว่า ความรู้ที่ถูกกำหนดขึ้นมีความซับซ้อนจะส่งผลกระทบต่อพฤติกรรมของครูและการเรียนรู้ของนักเรียน เช่นเดียวกับ Shulman (1988 : 8-9) ที่กล่าวถึงความรู้เกี่ยวกับผู้เรียนและคุณลักษณะของผู้เรียนว่า เป็นความรู้ที่จะเป็นข้อมูลเกี่ยวกับวิธีการเรียนรู้ของผู้เรียน ระดับพัฒนาทางสติปัญญาของผู้เรียน แรงจูงใจในการเรียนรู้ มโนทัศน์เดิม มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ข้อมูลที่สำคัญและจำเป็นในการเรียนรู้ใหม่ของผู้เรียน ผลการวิจัยพบว่า ความรู้ในการสร้างมโนทัศน์และความเข้าใจมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์มีน้ำหนักองค์ประกอบมากที่สุด ทั้งนี้อาจเป็นเพราะการแสดงผลมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เป็นการสื่อสารแนวคิดหรือความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ และสะท้อนให้เห็นถึงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียน ด้วยวิธีการใช้อุปกรณ์ (Manipulatives) รูปภาพ (Pictures) สัญลักษณ์ทางการเขียน (Written Symbols) สัญลักษณ์ทางการพูด (Verbal Symbols) และบริบทในชีวิตประจำวัน (Real-life Context) (Lesh. 1979 : 33-40) สอดคล้องกับ Wendy (2010 : 19) ที่กล่าวถึงการแสดง (Representations) มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เป็นความรู้เกี่ยวกับการแสดงถึงความสัมพันธ์กับการคิดของผู้เรียน

ซึ่งรวมถึงการแสดงความสามารถของผู้เรียนเกี่ยวกับการเรียนรู้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ และความหลากหลายของการเรียนรู้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์นอกจากนั้น ความรู้ในการสร้างมโนทัศน์และความเข้าใจมโนทัศน์การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ มีน้ำหนักองค์ประกอบรองลงมา ทั้งนี้อาจเป็นเพราะการสร้างมโนทัศน์และความเข้าใจมโนทัศน์ทางการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เป็นการรับรู้เพื่อค้นหาลักษณะร่วมจากสิ่งที่เป็นรูปธรรมแล้วรวมกลุ่มจัดพวก ค้นหาสมมติฐานจนสามารถใช้เชื่อมมโนทัศน์อธิบายความหมาย จำแนกความแตกต่างกับมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์อื่นได้ แล้วเชื่อมโยงระหว่างความคิด ความจริง และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ จนสามารถแปลความตีความ และขยายความในปัญหาใหม่ได้ สอดคล้องกับ Hill, Ball และ Shilling (2008 : 381) ที่กล่าวว่าครูต้องมีความรู้ในการเรียนรู้ของผู้เรียนว่าความสามารถในการเข้าใจผู้เรียนเข้าใจมโนทัศน์นั้นได้อย่างไร และการเข้าใจในสิ่งที่แสดงถึงความเข้าใจของผู้เรียน ความรู้เกี่ยวกับการพัฒนาการคิดของผู้เรียนในแต่ละระดับชั้น ความสามารถในการเข้าใจเกี่ยวกับความรู้พื้นฐาน และประสบการณ์ของผู้เรียนในการแก้ปัญหา มีข้อเสนอแนะว่าควรเพิ่มวิธีการเชื่อมโยงความสัมพันธ์ในการคิดของผู้เรียนจากมโนทัศน์เดิมไปใช้ในการสร้างมโนทัศน์ใหม่ เช่นเดียวกับ Wendy (2010 : 19) กล่าวว่า ความเข้าใจ (Understanding) มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เป็นความรู้เกี่ยวกับการเข้าใจของผู้เรียน ซึ่งรวมถึงความตระหนักของมโนทัศน์ว่าผู้เรียนสามารถสร้างความสัมพันธ์ในมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ หรือความรู้เกี่ยวกับผู้เรียนว่าผู้เรียนเชื่อมโยงกับการเรียนรู้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์อย่างไร

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะเพื่อนำผลการวิจัยไปใช้

1.1 ในการจัดการเรียนรู้เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ผู้สอนควรตระหนักถึงความรู้ด้านต่างๆ ได้แก่ ด้านความรู้ในเนื้อหา ด้านความรู้ในการจัดการเรียนรู้ และด้านความรู้การเรียนรู้ของผู้เรียน

1.2 ควรพัฒนาหลักสูตรการพัฒนาอาจารย์ในการจัดการเรียนรู้เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในระดับอุดมศึกษา

1.3 ควรสร้างเกณฑ์การประเมินความรู้ของอาจารย์ในการจัดการเรียนรู้เรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในระดับอุดมศึกษา

2. ข้อเสนอแนะในการวิจัยครั้งต่อไป

2.1 ควรศึกษาองค์ประกอบของความรู้ของอาจารย์ในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์เรื่องอื่นในระดับอุดมศึกษา

2.2 ควรศึกษาองค์ประกอบของความรู้ของครูในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในระดับการศึกษาขั้นพื้นฐาน

2.3 ควรศึกษาองค์ประกอบของความรู้ของอาจารย์ในการจัดการเรียนรู้ในรายวิชาอื่นของอาจารย์ระดับอุดมศึกษา

2.4 ควรศึกษาองค์ประกอบของความรู้ของครูในการจัดการเรียนรู้ในกลุ่มสาระอื่นในระดับการศึกษาขั้นพื้นฐาน

เอกสารอ้างอิง

- ขจรศรี วรรณสถิต. (2544). **ปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ระดับปริญญาตรี**. ปริญญาานิพนธ์ การศึกษามหาบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช.
- ประเวศ วะสี. (2543). **ปฏิรูปการเรียนรู้ผู้เรียนสำคัญที่สุด**. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- ยุพิน พิพิธกุล. (2545). **การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ยุคปฏิรูปการศึกษา**. กรุงเทพฯ : บพิธการพิมพ์.
- วัชร น้อยมี. (2551). **การพัฒนาชุดการเรียนการสอนแบบสืบสวนสอบสวน เรื่อง การให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เพื่อส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลของผู้เรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4**. ปริญญาานิพนธ์การศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.

(2554). **ครูคณิตศาสตร์มืออาชีพเส้นทางสู่ความสำเร็จ**. กรุงเทพฯ : อรุณการพิมพ์.

_____. (2555). **การวัดผลและประเมินผลคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ : ซีเอ็ดยูเคชั่น.

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ. (2542).

พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542.

กรุงเทพฯ : พรักหวานกราฟฟิค.

สำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา. (2555). “มาตรฐานคุณวุฒิระดับปริญญาตรี สาขาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ พ.ศ. 2554”. **เอกสารแนบท้ายประกาศกระทรวงศึกษาธิการ**. กรุงเทพฯ : สำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา.

สุเทพ ทองอยู่. (2533). “ปัญหาทางคณิตศาสตร์” ใน **เอกสารประกอบการอบรมครูคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 6 วันที่ 9-10 พฤษภาคม 2533**. หน้า 1-23. กรุงเทพฯ : คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

Bittinger, M. L. (1972). **Logic and Proof**. Massachusette : Addison-Wesley.

Boyatzis, E. Richard. (1982). **The Competent Manager : A Model for Effective Performance**. New York : Wiley.

Fennema, E. and M. L. Franke. (1992). “Teachers’ Knowledge and Its Impact”. In Grouws, D.A., ed. **Handbook of Mathematics Teaching and Learning**. pp. 147-164. New York : Macmillan.

Hersh, R. (1993). “Proving is Convincing and Explaining”. **Educational Studies in Mathematics**. 24(4) : 389-399.

Markel, W. D. (1994). “The Role of Proof in Mathematics Education”. **School Science and Mathematics**. 94(6) : 291-295.

- Moore, Robert Crumley. (1990). **College Students' Difficulties in Learning to Do Mathematical Proof**. Athens : The University of Georgia.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.
- Solow, Daniel. (2002). **How to Read and Do Proofs**. 3rd ed. New York : John Wiley & Son.
- Welder, M. Rachael. (2007). **Preservice Elementary Teachers' Mathematical Content Knowledge of Prerequisite Algebra Concepts**. Doctoral Dissertation, Department of Mathematics, Montana State University.
- Wendy, A. O'hanlo. (2010). **Characterizing the Pedagogical Content Knowledge of Pre-service Secondary Mathematics Teacher**. Doctoral Dissertation, Department of Mathematics, Illinois State University.