

แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่เน้น
การแก้ปัญหา: กรณีศึกษาการประยุกต์ใช้พื้นที่วงกลม
Students' Mathematical Ideas in Problem-Solving Mathematics
Classrooms: A Case Study of Circle Area Application

ธนะชาติ อนุนิวัฒน์¹, คณิตา ปามูทา² และนฤมล ช่างศรี^{3,*}

Dhanachat Anuniwat¹, Kanita Pamuta² and Narumon Changsri^{3,*}

(Received: Mar. 11, 2025; Revised: Jun. 10, 2025; Accepted: Jun. 12, 2025)

บทคัดย่อ

การวิจัยนี้ใช้การออกแบบกรณีศึกษา และระเบียบวิธีวิจัยเชิงคุณภาพ โดยวิธีการวิเคราะห์เนื้อหาแบบนัย มีวัตถุประสงค์เพื่อระบุลักษณะแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ที่ปรากฏระหว่างการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการประยุกต์ใช้พื้นที่วงกลม กลุ่มเป้าหมายคือ นักเรียนระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 64 คน จากโรงเรียนสาธิตการศึกษาขั้นพื้นฐานของมหาวิทยาลัยแห่งชาติ แห่งหนึ่งในประเทศญี่ปุ่น เลือกโดยการสุ่มตัวอย่างแบบเจาะจง เครื่องมือที่ใช้เก็บรวบรวมข้อมูล คือ แผนการจัดการเรียนรู้ ในหน่วยการเรียนรู้ เรื่องพื้นที่วงกลม แผนที่ 4 จากทั้งหมด 5 แผน เก็บข้อมูลจากผลงานของนักเรียน การวิเคราะห์ข้อมูลอาศัยกรอบแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนตามแนวคิดของ Isoda & Katagiri (2012)

ผลการวิจัยพบว่า มีแนวคิดทางคณิตศาสตร์ จำนวน 8 แนวคิด ได้แก่ แนวคิดเกี่ยวกับกลุ่มแนวคิดเกี่ยวกับหน่วย แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงแทน แนวคิดเกี่ยวกับการดำเนินการ แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธี แนวคิดเกี่ยวกับการประมาณค่า แนวคิดเกี่ยวกับคุณสมบัติพื้นฐาน แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงออกทางสัญลักษณ์ ตัวอย่างแนวคิด ของนักเรียนที่พบ เช่น การใช้ภาพและสัญลักษณ์ในการแสดงวิธีการคำนวณ และแสดงคำตอบการดำเนินการทางคณิตศาสตร์เพื่อหาพื้นที่ และการใช้สมบัติพื้นฐานเพื่อการแสดงทางคณิตศาสตร์

คำสำคัญ: แนวคิดทางคณิตศาสตร์ การแก้ปัญหามathematics คณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษา
พื้นที่วงกลม กรณีศึกษา

¹ ภาควิชาวิทยาการศึกษา บัณฑิตวิทยาลัยมนุษยศาสตร์และสังคมศาสตร์ มหาวิทยาลัยฮิโรชิม่า ประเทศญี่ปุ่น

Division of Educational Sciences, Graduate School of Humanities and Social Sciences, Hiroshima University, Japan

^{2,3} สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น ขอนแก่น 40002

Mathematics Education Program, Faculty of Education, Khon Kaen University, Khon Kaen, Thailand

*Corresponding author, e-mail: changsri_crme@kku.ac.th

ABSTRACT

This study employed a case study design and a qualitative research methodology. Data were analyzed using deductive content analysis. The objective was to identify the characteristics of sixth-grade students' mathematical ideas that emerged during problem-solving tasks related to the application of circle area. The target group consisted of 64 sixth-grade students from a national university-affiliated elementary school in Japan, selected through purposive sampling. The primary data source was a lesson plan from the unit on the area of a circle, specifically the fourth lesson in a five-lesson sequence. Data were collected from students' written work, and the analysis was guided by the framework of mathematical thinking developed by Isoda & Katagiri (2012).

The findings revealed eight core mathematical ideas demonstrated by students: the idea of sets, the idea of units, the idea of representations, the idea of operations, the idea of algorithms, the idea of approximations, the idea of fundamental properties, and the idea of expression. Examples of student thinking included the use of images and symbols to explain calculation methods and solutions, execution of mathematical operations to determine area, and application of fundamental properties to construct and interpret mathematical expressions.

Keywords: Mathematical ideas, Mathematical problem solving, Elementary mathematics, Circle area, Case study

บทนำ

การพัฒนาการคิดและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นจุดเน้นสำคัญในหลักสูตรการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียนทั่วโลก รวมถึงประเทศญี่ปุ่น (Ministry of Education Culture Sports Science and Technology, 2018) มุมมองดังกล่าว สะท้อนให้เห็นถึงความสำคัญของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ที่ไม่ได้มีสถานะเพียงแค่การเรียนเกี่ยวกับคำนวณ จำสูตร กฎ หลักการและได้มาซึ่งคำตอบที่ถูกต้องเท่านั้น แต่เป็นการพิจารณาคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียนในสถานะใหม่ ที่เน้นถึงความเข้าใจใน ธรรมชาติของคณิตศาสตร์ แนวคิดทางคณิตศาสตร์ การให้เหตุผล และการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ เพื่อประยุกต์ใช้ในสถานการณ์ที่หลากหลาย (National Research Council [NRC], 2001; ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์, 2565) อย่างไรก็ตาม การนำกระบวนการดังกล่าวไปปรับใช้ในภาคปฏิบัติ ยังคงมีความท้าทายอย่างมาก โดยเฉพาะในบริบท

ที่ยังเน้นการถ่ายทอดสูตร กฎ และวิธีการ มากกว่าการพัฒนากระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียน ประเทศไทยเป็นหนึ่งในประเทศมีแนวทางในการพัฒนา การเรียนการสอนที่มุ่งเน้น กระบวนการคิดของนักเรียนอย่างต่อเนื่อง (Wittmann, 2021) โดยเฉพาะผ่านแนวทาง การศึกษา ชั้นเรียน ผูกกับชั้นเรียนที่เน้นการแก้ปัญหาหรือ ชั้นเรียนที่ใช้วิธีการแบบเปิด ซึ่งเป็นชั้นเรียนที่ครู มีบทบาท ในการส่งเสริมให้นักเรียนมีบทบาท ในการสร้างความรู้ด้วยตนเองผ่านการแก้ปัญหา ทางคณิตศาสตร์ และเปิดโอกาสให้นักเรียนได้มีพื้นที่แสดง แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน และ สรุปลงเป็นองค์ความรู้ของตนเอง (Hino, 2007; ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์, 2565; Takahashi, 2021; Inprasitha, 2022)

แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน หมายถึง วิธีการคิดของนักเรียนที่เกิดจากการมีส่วนร่วม ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ (Intaros & Inprasitha, 2019) แนวคิดเหล่านี้เป็นพื้นฐานสำคัญ ของการเรียนรู้ที่ลึกซึ้งและสนับสนุนการเข้าใจธรรมชาติของคณิตศาสตร์ (Isoda & Katagiri, 2012) โดยเฉพาะในบริบทของการเรียนรู้เนื้อหาที่ยากและซับซ้อน เช่น เรขาคณิต เป็นต้น ที่ต้องใช้การคิด วิเคราะห์เชิงภาพ (Visual thinking) การประมาณค่า และการให้เหตุผลอย่างเป็นระบบ ดังสะท้อน จากผลการประเมินของโครงการประเมินสมรรถนะนักเรียนมาตรฐานสากลในปี พ.ศ. 2565 พบว่า นักเรียนจำนวนมากทั่วโลก มีสมรรถนะด้านรูปทรงและปริภูมิ (Space and shape) ซึ่งเป็นสมรรถนะ ที่เกี่ยวข้องกับเรขาคณิต ในระดับ 2 เท่านั้น สะท้อนถึงความสามารถในการแก้ปัญหาเรขาคณิต พื้นฐาน โดยนักเรียนสามารถหาพื้นที่หรือปริมาตรของรูปทรงเรขาคณิตอย่างง่าย หรือสามารถแบ่งรูป สี่เหลี่ยมเป็นสามเหลี่ยมเพื่อคำนวณพื้นที่ กล่าวคือนักเรียนส่วนใหญ่สามารถแก้ปัญหาได้เฉพาะโจทย์ ปัญหาพื้นฐานที่คุ้นเคย หรือใช้ทักษะเรขาคณิตในระดับเบื้องต้นเท่านั้น (Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD], 2023) ในขณะที่ประเทศไทย ส่วนมาก นักเรียนมีสมรรถนะด้านเดียวกันส่วนใหญ่อยู่ในระดับ 3 ซึ่งหมายความว่านักเรียนสามารถ วางกลยุทธ์ ในการแก้ปัญหา โดยต้องตัดสินใจแบบเป็นลำดับขั้น หรือมีความยืดหยุ่นในการใช้แนวคิดที่คุ้นเคย ในการมองเห็นเชิงมิติเพื่อหาวิธีแก้ปัญหา เช่น การหมุน พับ หรือแยกส่วนรูปเรขาคณิต อย่างไรก็ตาม รายงานของ Programmed for International Student Assessment (PISA) ยังชี้ให้เห็นว่า นักเรียนญี่ปุ่นก็ยังมีความท้าทายในด้านการประยุกต์ความรู้ทางเรขาคณิต กับสถานการณ์ที่ซับซ้อน (OECD, 2023) จากผลการประเมินดังกล่าว สะท้อนให้เห็นถึงความท้าทายในการเรียนรู้เรขาคณิต ในระดับที่ได้ความสนใจเป็นอย่างมาก และความท้าทายดังกล่าวมีสาเหตุมาจากประการ เช่น การขาด ความเข้าใจเชิงลึกเกี่ยวกับแนวคิดและการใช้เหตุผลทางเรขาคณิตอาจส่งผลให้ผู้เรียนขาดทักษะ ในการประยุกต์ความรู้หรือเชื่อมโยงกับสถานการณ์ที่หลากหลาย

เมื่อพิจารณาเนื้อหาเรื่อง วงกลมและการหาพื้นที่วงกลม ซึ่งเป็นหัวข้อในการเรียนรู้ เรขาคณิตที่เชื่อมโยงแนวคิดพื้นฐานหลายมิติ เช่น การวัด การสร้าง การประมาณ การแบ่งประกอบรูป

และการให้เหตุผล หากนักเรียนสามารถพัฒนาแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของตนเองได้ในหัวข้อนี้ จะส่งผลต่อการเข้าใจภาพรวมของคณิตศาสตร์ในระดับที่ลึกซึ้งขึ้น (Isoda & Katagiri, 2012) เนื่องจากเรขาคณิตเป็นพื้นฐานในการทำความเข้าใจคณิตศาสตร์แขนงอื่นๆ อีกด้วย เช่น พีชคณิต เป็นต้น (Cai & Hwang, 2022) นอกจากนี้ การที่ครูสามารถรับรู้และวิเคราะห์แนวคิดของนักเรียนที่ปรากฏระหว่างการเรียนรู้ จะช่วยให้ครูออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ที่ส่งเสริมทักษะการคิดของนักเรียนได้ดียิ่งขึ้น (Hino, 2007; Takahashi, 2021; Cai & Hwang, 2022)

งานวิจัยที่ศึกษาในมุมมองที่เกี่ยวข้องกับ แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ได้รับความสนใจอย่างมาก (Isoda, 1996; จตุพร นาสินสร้อย, นฤมล ช่างศรี และไมตรี อินทร์ประสิทธิ์, 2558; Rasmussen & Isoda, 2018; Changsri, Inprasitha, Tang, Boonsena & Pattanajak, 2024; Inprasitha, Changsri & Inprasitha, 2024) ซึ่งงานเหล่านี้ล้วนแสดงให้เห็นถึง ความสำคัญของการเข้าใจแนวคิดและกระบวนการคิดของนักเรียนเพื่อพัฒนาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ แต่อย่างไรก็ตาม งานวิจัยที่กล่าวไปข้างต้น มีบริบท เนื้อหา และวิธีการศึกษาที่แตกต่างกัน โดยเฉพาะเนื้อหาเกี่ยวกับการประยุกต์ใช้พื้นที่วงกลม ยังมีงานวิจัยที่ศึกษาเชิงลึกในระดับกระบวนการคิดของผู้เรียนอย่างจำกัด ดังนั้น งานวิจัยนี้จึงมีเป้าหมายในการศึกษาแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในการแก้ปัญหาเรื่องการประยุกต์ใช้พื้นที่วงกลม ผู้วิจัยมุ่งหวังว่าการวิจัยดังกล่าวจะเป็นงานวิจัยพื้นฐาน ในการทำความเข้าใจแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่เป็นธรรมชาติทางการคิดของนักเรียน และมุ่งหวังว่า ครูจะสามารถใช้แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนเป็นฐานในการพัฒนากระบวนการเรียนรู้ที่ส่งเสริมการคิดและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

วัตถุประสงค์การวิจัย

เพื่อระบุลักษณะแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ที่ปรากฏระหว่างการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการประยุกต์ใช้พื้นที่วงกลม

กรอบแนวคิดในการวิจัย

หลายทศวรรษที่ผ่านมา มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ในงานวิจัยคณิตศาสตร์ศึกษาได้รับความสนใจอย่างต่อเนื่อง และงานวิจัยหลายชิ้นแสดงให้เห็นถึง ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนเป็นสิ่งที่ไม่สามารถหลีกเลี่ยงได้ และมีบทบาทสำคัญต่อการพัฒนาการเรียนรู้ ทั้งในแง่ที่อาจเป็นอุปสรรค และ ในแง่ที่สามารถนำมาใช้เป็นฐานในการปรับปรุงการเรียนรู้ (Prakitipong & Nakamura, 2006; Fujii, 2020) โดย Smith, diSessa & Roschelle (1994) อธิบายว่า มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนมีรากฐานมาจากความรู้เดิมที่ฝังแน่นในตัวผู้เรียน ซึ่งอาจเป็นประสบการณ์ชีวิต หรือการเรียนรู้ในบริบทอื่นมาก่อน โดยผู้เรียนจะนำความรู้เหล่านั้นมาใช้กับสถานการณ์ใหม่อย่างอัตโนมัติ

แม้บางครั้งอาจไม่เหมาะสมก็ตาม ซึ่งนำไปสู่การตอบคำถามหรือการอธิบายที่คลาดเคลื่อน ทั้งนี้ Ryan & Williams (2007) กล่าวว่า มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกิดขึ้นได้จากหลากหลายสาเหตุ ทั้งความสับสนในเชิงนิยาม การใช้สัญลักษณ์ที่ผิดพลาด หรือการตีความสถานการณ์โจทย์ที่คลาดเคลื่อน งานวิจัยดังกล่าวพวกเขายังเสนอให้ครูมองข้อผิดพลาดของผู้เรียนในเชิงบวก กล่าวคือเป็นหลักฐานเชิงพฤติกรรมที่สะท้อนแนวคิดที่อยู่เบื้องหลัง ซึ่งสามารถใช้เป็นฐานในการส่งเสริมการเรียนรู้เพิ่มเติมได้ ทำนองเดียวกัน Radatz (1979) ได้จำแนกแหล่งที่มาของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน พบว่ามีมาจากปัจจัยที่หลากหลาย เช่น ปัญหาทางด้านภาษา การคิดแบบอัตโนมัติ หรือการประยุกต์ความรู้ผิดบริบท ซึ่งล้วนเป็นปัจจัยที่พบบ่อยในชั้นเรียนคณิตศาสตร์

แม้งานวิจัยข้างต้นจะมีคุณูปการสำคัญต่อ การอธิบายที่มาของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ แต่ส่วนใหญ่ยังคงมุ่งเน้นไปที่การจำแนกประเภทหรือวิเคราะห์สาเหตุ ในลักษณะของผลลัพธ์ที่ปรากฏ เช่น การระบุว่าผู้เรียนมีความเข้าใจคลาดเคลื่อนเกี่ยวกับหน่วย รูปแบบหรือสัญลักษณ์อย่างไร แนวทางดังกล่าวเน้นวิเคราะห์เฉพาะสิ่งที่ผู้เรียนทำผิด โดยไม่ได้ให้ความสำคัญกับกระบวนการคิดที่อยู่เบื้องหลัง ซึ่งอาจนำไปสู่ความเข้าใจที่ไม่ครบถ้วนเกี่ยวกับพัฒนาการด้านแนวคิดของผู้เรียน ในทางตรงกันข้าม Isoda & Katagiri (2012) มุ่งเน้นการทำความเข้าใจกระบวนการคิดของผู้เรียน โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อวิเคราะห์ว่าผู้เรียนใช้กระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์อย่างไรในการสร้างหรือเชื่อมโยงแนวคิด แนวคิดนี้ไม่ได้มองข้อผิดพลาดในฐานะสิ่งที่ต้องแก้ไขเพียงอย่างเดียว แต่ถือว่าข้อผิดพลาดเป็นหลักฐานสำคัญที่สะท้อนรูปแบบการคิดของผู้เรียน ซึ่งสามารถนำมาใช้ในการส่งเสริมการพัฒนาแนวคิด ยิ่งไปกว่านั้น แนวคิดดังกล่าว จำแนกแนวคิดทางคณิตศาสตร์ออกเป็นเป็น 9 แนวคิด ได้แก่

แนวคิดเกี่ยวกับกลุ่ม (Idea of sets) เกี่ยวข้องกับการกำหนดขอบเขตและเงื่อนไขของวัตถุที่อยู่ในการพิจารณา ซึ่งรวมถึงการระบุว่าวัตถุใดอยู่ในและวัตถุใดไม่อยู่ พร้อมทั้งเหตุผลที่เกี่ยวข้อง

แนวคิดเกี่ยวกับหน่วย (Idea of units) เกี่ยวข้องกับการให้ความสำคัญกับการระบุองค์ประกอบพื้นฐานหรือ “หน่วย” ของจำนวน การวัด รูปทรง และการตรวจสอบความสัมพันธ์ระหว่างหน่วย

แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงแทน (Idea of representations) เกี่ยวข้องกับ การใช้แบบจำลองหรือระบบสัญลักษณ์ที่เหมาะสมเพื่ออธิบายแนวคิดทางคณิตศาสตร์อย่างชัดเจน เช่น การใช้เลขหลักหน่วย เส้นจำนวน และแบบจำลองพื้นที่

แนวคิดเกี่ยวกับการดำเนินการ (Idea of operations) เกี่ยวข้องกับการอธิบาย ขยายความหมายของวัตถุทางคณิตศาสตร์ ซึ่งหมายถึง ตัวเลข รูปทรง และการดำเนินการของวัตถุทางคณิตศาสตร์เหล่านั้น เช่น การบวก ลบ คูณ หาร หรือการแปลงเรขาคณิต

แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธี (Idea of algorithms) เกี่ยวข้องกับ การสร้างกระบวนการดำเนินการทางคณิตศาสตร์อย่างเป็นระบบ เพื่อนำไปใช้ในการคำนวณ เช่น ขั้นตอนวิธีสำหรับการบวก ลบ คูณ และหาร

แนวคิดเกี่ยวกับการประมาณค่า (Idea of approximations) เป็นแนวคิดที่นักเรียนใช้ในการวางแผนหรือ ประเมินความถูกต้องของปัญหา

แนวคิดเกี่ยวกับคุณสมบัติพื้นฐาน (Idea of fundamental properties) เป็นแนวคิดที่ใช้คุณสมบัติพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ เช่น สมบัติการแจกแจง สมบัติการสลับที่ และสมบัติการเปลี่ยนหมู่ มาช่วยในการแก้ปัญหา

แนวคิดเกี่ยวกับการคิดเชิงฟังก์ชัน (Idea of functional thinking) เป็นแนวคิดที่แสดงถึงความสัมพันธ์ของปริมาณ และความสัมพันธ์ดังกล่าวถูกกำหนดโดยกฎความสัมพันธ์

แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงออกทางสัญลักษณ์ (Idea of expressions) เป็นแนวคิดที่เกี่ยวข้องกับการใช้สัญลักษณ์ สมการทางคณิตศาสตร์ เพื่อแสดงความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์

วิธีดำเนินการวิจัย

1. กลุ่มเป้าหมาย

การวิจัยนี้ใช้การออกแบบกรณีศึกษาและระเบียบวิธีวิจัยเชิงคุณภาพ เนื่องจากสามารถช่วยให้เข้าใจปรากฏการณ์ที่ซับซ้อนในบริบทที่หลากหลายได้ (Creswell & Poth, 2023) โดยบริบทในการศึกษานี้ คือ ชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่เน้นการแก้ปัญหา ผู้วิจัยใช้วิธีการวิเคราะห์เนื้อหาแบบนิรนัย (Mayring, 2022) เนื่องจากเป็นกระบวนการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพที่อาศัยกรอบแนวคิดที่กำหนดไว้ล่วงหน้า กรอบแนวคิดที่ใช้ในที่นี้คือแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน (Isoda & Katagiri, 2012)

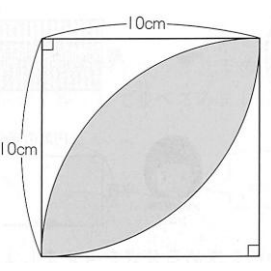
กลุ่มเป้าหมายของการวิจัย คือ นักเรียนระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 จำนวนทั้งหมด 64 คน จากโรงเรียนสาธิตการศึกษาขั้นพื้นฐานของมหาวิทยาลัยแห่งชาติ แห่งหนึ่งในภูมิภาคตะวันออกเฉียงเหนือของประเทศญี่ปุ่น ที่มีวัฒนธรรมการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ผ่านกระบวนการแก้ปัญหา และส่งเสริมการศึกษาขั้นเรียนอย่างต่อเนื่องในระดับโรงเรียน เลือกโดยการสุ่มตัวอย่างแบบเจาะจง ข้อมูลถูกเก็บรวบรวมในภาคการศึกษาต้น ปีการศึกษา 2565

2. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บข้อมูลคือแผนการจัดการเรียนรู้ ซึ่งเป็นแผนที่ 4 จากทั้งหมด 5 แผน การจัดการเรียนรู้ในหน่วยการเรียนรู้ที่ 7 เรื่อง พื้นที่วงกลม ตามหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษาของประเทศญี่ปุ่น โดยแต่ละแผนฯ ใช้เวลาเรียน 50 นาที เนื้อหาของแผนการจัดการเรียนรู้ทั้ง 5 แผนมีลำดับการพัฒนาแนวคิดอย่างเป็นระบบ กล่าวคือ แผนที่ 1-2 มุ่งเน้นให้ผู้เรียนเข้าใจ

แนวคิดเบื้องต้นและการพิสูจน์สูตรหาพื้นที่วงกลม แผนที่ 3 เป็นการฝึกคำนวณพื้นที่วงกลม และแผนที่ 4 เป็นการประยุกต์ใช้ความรู้ดังกล่าวในสถานการณ์ใหม่ โดยเชื่อมโยงแนวคิดที่เรียนมาก่อนหน้านี้ เพื่อแก้ปัญหาที่มีลักษณะซับซ้อนมากขึ้น ด้วยเหตุนี้ ผู้วิจัยจึงเลือกแผนการจัดการเรียนรู้แผนที่ 4 เป็นบริบทหลักในการเก็บข้อมูล เพราะสามารถสะท้อนให้เห็นถึงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่นักเรียนได้พัฒนาจากแผนก่อนหน้าได้อย่างชัดเจน

แผนการจัดการเรียนรู้ดังกล่าวได้รับการออกแบบผ่านกระบวนการศึกษาชั้นเรียน โดยกลุ่มครูผู้สอนคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษาตอนปลายในโรงเรียน ได้ร่วมกันวางแผน ดำเนินการสอน และสะท้อนผลการจัดการเรียนรู้ร่วมกันหลังการสอน ลักษณะสำคัญของแผนการจัดการเรียนรู้ คือ การใช้ปัญหาปลายเปิด ซึ่งประกอบด้วยองค์ประกอบสำคัญ ได้แก่ ปัญหา เงื่อนไข และแนวคิด คาคการณ์ ตามที่แสดงในภาพที่ 1

แผนที่ 4 การประยุกต์ใช้พื้นที่วงกลม	
	ปัญหา: ช่วยกันคิดเกี่ยวกับวิธีการในการหาพื้นที่วงกลมที่แรเงากันเถอะ เงื่อนไข: 1. ให้นักเรียนแต่ละคนลองคิดเกี่ยวกับวิธีการในการหาพื้นที่วงกลมที่แรเงา 2. แลกเปลี่ยนแนวคิดของตนเองกับเพื่อนในกลุ่ม 3. ร่วมกันสรุปแนวคิดของกลุ่ม 4. ร่วมกันอภิปรายและเปรียบเทียบแนวคิดของแต่ละกลุ่ม

ภาพที่ 1 สาระสำคัญของแผนการจัดการเรียนรู้ในแผนที่ 4

3. การเก็บรวบรวมข้อมูล

งานวิจัยนี้ผ่านการพิจารณาจริยธรรมและได้รับการยกเว้นก่อนเริ่มเก็บข้อมูลภาคสนาม ผู้วิจัยได้รับหนังสืออนุญาตจากผู้อำนวยการโรงเรียนและหนังสือยินยอมจากนักเรียนเรียบร้อยแล้ว ข้อมูลทั้งหมดได้รับการเก็บและดูแลเป็นความลับตามหลักจริยธรรมวิจัย ระหว่างการจัดการเรียนการสอน ผู้วิจัยบันทึกกระบวนการแก้ปัญหาของนักเรียนทั้งในรูปวิดีโอและเอกสารงานเขียน เพื่อนำไปวิเคราะห์แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนต่อไป

4. การวิเคราะห์ข้อมูล

ภายหลังจากนำแผนการจัดการเรียนรู้ไปใช้จริง ผู้วิจัยรวบรวมวิธีคิดแก้ปัญหาของนักเรียน และวิเคราะห์ตามกรอบของ Isoda & Katagiri (2012) เพื่อระบุลักษณะแนวคิดทางคณิตศาสตร์

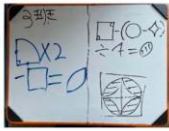
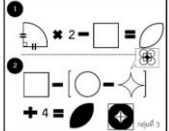
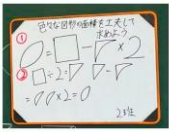
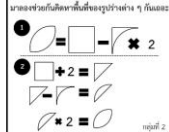
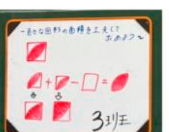
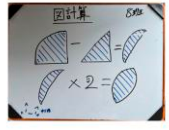
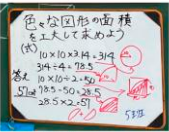
ของนักเรียน ตามวัตถุประสงค์ของงานวิจัย ในกระบวนการวิเคราะห์ข้อมูล เพื่อให้การวิเคราะห์ข้อมูลมีความน่าเชื่อถือ ผู้วิจัยใช้กระบวนการวิเคราะห์ร่วมกัน ตามแนวคิดของ Cornish, Gillespie & Zittoun (2013) ซึ่งเป็นกระบวนการที่อาศัยนักวิจัยมากกว่าหนึ่งคนในการวิเคราะห์ข้อมูล โดยมีการอภิปราย การแลกเปลี่ยนความคิดเห็น และเจรจาต่อรองเกี่ยวกับการตีความข้อมูล เพื่อลดอคติส่วนบุคคล ช่วยให้ได้ข้อสรุปที่รอบด้านและครอบคลุม หลังจากนั้นนำผลวิจัยที่ได้มานำเสนอด้วยการพรรณนาวิเคราะห์ ดังปรากฏในส่วนถัดไป

ผลการวิจัย

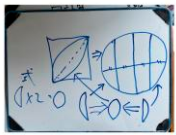
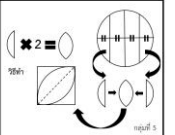
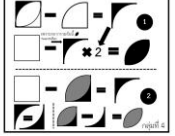
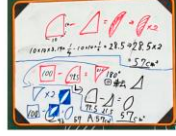
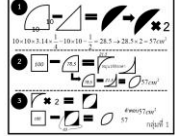
การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์คือ เพื่อระบุลักษณะแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ปรากฏระหว่างการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการประยุกต์ใช้พื้นที่ของวงกลม จากการวิเคราะห์วิธีการคิดแก้ปัญหาของนักเรียน จำนวนทั้งสิ้น 21 วิธี พบลักษณะแนวคิดทางคณิตศาสตร์จำแนกได้ 8 แนวคิด ดังนี้

แนวคิดเกี่ยวกับกลุ่ม นักเรียนแสดงความสามารถในการกำหนดขอบเขตและเงื่อนไขของวัตถุที่เกี่ยวข้องกับพื้นที่ที่ต้องพิจารณา เช่น การระบุว่าพื้นที่ใดเป็นส่วนหนึ่งของวงกลม และพื้นที่ใดอยู่นอกเหนือจากขอบเขตที่ต้องคำนวณ พร้อมทั้งให้เหตุผลที่สอดคล้องกับโจทย์ **แนวคิดเกี่ยวกับหน่วย** แนวคิดนี้เกี่ยวข้องกับการระบุหน่วยพื้นฐานของพื้นที่ เช่น การเห็นรูปสี่เหลี่ยมเป็น 1 หน่วยใหญ่ที่สามารถแบ่งออกเป็นหน่วยย่อยได้ (เช่น รูปสามเหลี่ยมสองรูป) รวมถึงความเข้าใจในความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยต่างๆ ที่ประกอบกันเป็นพื้นที่เป้าหมาย **แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงแทน** นักเรียนใช้ภาพภาพร่าง ลูกศร หรือเครื่องหมายอื่นๆ เพื่อสื่อความหมายในการหาพื้นที่ เช่น การแสดงส่วนของวงกลมที่ต้องการคำนวณ หรือการใช้ภาพช่วยจัดลำดับขั้นตอนของการแก้ปัญหา **แนวคิดเกี่ยวกับการดำเนินการ** นักเรียนใช้การดำเนินการทางคณิตศาสตร์ เช่น บวก ลบ หรือหาพื้นที่บางส่วนเพื่อคำนวณพื้นที่ที่โจทย์ต้องการ พร้อมทั้งแสดงวิธีคิดอย่างเป็นระบบโดยใช้ทั้งตัวเลขและรูปภาพประกอบ **แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธี** แนวคิดนี้ปรากฏในการที่นักเรียนใช้ขั้นตอนการแก้ปัญหาอย่างเป็นลำดับ เช่น เริ่มจากการหาพื้นที่สี่เหลี่ยม จากนั้นค่อยหาพื้นที่ $1/4$ ของวงกลม แล้วเปรียบเทียบหรือรวมพื้นที่ทั้งสองเข้าด้วยกัน **แนวคิดเกี่ยวกับการประมาณค่า** นักเรียนวางแผนและประเมินขนาดพื้นที่แบบคร่าวๆ เพื่อช่วยในการตัดสินใจ เช่น การเปรียบเทียบว่า $1/4$ วงกลมมีพื้นที่ใกล้เคียงกับสามเหลี่ยมในรูปหรือไม่ โดยไม่ต้องคำนวณอย่างละเอียดในเบื้องต้น **แนวคิดเกี่ยวกับคุณสมบัติพื้นฐาน** นักเรียนใช้ความรู้เกี่ยวกับสมบัติของจำนวนและรูปเรขาคณิต เช่น การสลับที่การเปลี่ยนกลุ่ม หรือการหมุนรอบจุด เพื่อช่วยในการเปลี่ยนแปลงหรือวิเคราะห์พื้นที่ให้เข้าใจง่ายขึ้น **แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงออกทางสัญลักษณ์** นักเรียนใช้สัญลักษณ์หรือสมการทางคณิตศาสตร์เพื่อแทนความสัมพันธ์เชิงปริมาณในการคำนวณพื้นที่ พร้อมทั้งใช้การแทนค่าหรืออธิบายความคิดผ่านตัวแปรอย่างชัดเจน และตัวอย่างของแนวคิด ดังแสดงในตารางที่ 1

ตารางที่ 1 ตัวอย่างแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ที่ปรากฏระหว่างการแก้ปัญหา

แนวคิดเกี่ยวกับ	ตัวอย่างแนวคิด	คำอธิบาย
1. กลุ่ม	 	จากแนวทางการแก้ปัญหาของนักเรียน พบว่า มีการมองวงกลม 4 วงเป็นหนึ่งกลุ่มซึ่งสะท้อนแนวคิดเกี่ยวกับการแสดง “กลุ่มของหน่วย” ที่ประกอบด้วยหลาย หน่วยรวมกัน และถูกมองเป็นกลุ่มเดียวอย่างเป็นระบบ
2. หน่วย	 	จากแนวทางการแก้ปัญหาของนักเรียน พบว่า มีการมองรูปสี่เหลี่ยมหนึ่งหน่วยว่าเป็นรูปสามเหลี่ยมสองหน่วยประกอบกัน ซึ่งสะท้อนแนวคิดเกี่ยวกับความเป็น “หนึ่งหน่วย” ที่แสดงถึงองค์ประกอบเล็กที่สุดของรูปเรขาคณิตในบริบทนี้
3. การแสดงแทน	 	จากแนวทางการแก้ปัญหาของนักเรียน พบว่า มีการใช้ภาพ ภาพแรงงา ลูกศร และเครื่องหมายต่างๆ เพื่อสื่อความหมายในการหาพื้นที่
4. การดำเนินการ	 	จากแนวทางการแก้ปัญหาของนักเรียน พบว่า มีการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ภาพเป็นสื่อแทนการดำเนินการดังกล่าว
5. ขั้นตอนวิธี	 	จากแนวทางการแก้ปัญหาของนักเรียน พบว่า มีการแก้ปัญหอย่างเป็นลำดับขั้นตอน โดยเริ่มจากการหาพื้นที่ของวงกลมทั้งหมด จากนั้นหาพื้นที่ 1/4 ของวงกลม แล้วหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสและนำมาแบ่งครึ่ง เมื่อนำพื้นที่ 1/4 ของวงกลมที่ได้ไปลบกับพื้นที่ครึ่งหนึ่งของสี่เหลี่ยมจัตุรัส จะได้พื้นที่สี่เหลี่ยม (2) และเมื่อนำพื้นที่สี่เหลี่ยมดังกล่าวมาคูณด้วย 2 จะได้พื้นที่ที่ต้องการ ซึ่งสะท้อนแนวคิดเกี่ยวกับ “ลำดับขั้นตอน” ในการแก้ปัญหา

ตาราง ที่ 1 (ต่อ)

แนวคิดเกี่ยวกับ	ตัวอย่างแนวคิด	คำอธิบาย
6. ประมวลค่า	 	จากแนวทางการแก้ปัญหาของนักเรียน พบว่า มีการประมวลค่ารูปเซกเมนต์ (Segment) จากการแบ่งรูปวงกลม ซึ่งสะท้อนแนวคิดเกี่ยวกับการใช้ค่าใกล้เคียงแทนค่าจริง เพื่อความง่ายและสะดวกในการแก้ปัญหา
7. คุณสมบัติพื้นฐาน	 	จากแนวทางการแก้ปัญหาของนักเรียน ตัวอย่างเช่น ในวิธีการที่ 1 พบว่าพื้นที่สีเขียว (r) เกิดจากการนำพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากลบด้วยพื้นที่ 1/4 ของวงกลม เมื่อหมุนพื้นที่สีเขียวดังกล่าวอีก 180 องศา จะได้อีกสีเขียวหนึ่งที่อยู่ในทิศทางตรงข้าม ซึ่งแสดงให้เห็นว่ามีการอาศัยคุณสมบัติพื้นฐานของเรื่องสมมาตร ในส่วนของสมมาตรจุด (Point symmetry)
8. การแสดงออกทางสัญลักษณ์	 	จากแนวทางการแก้ปัญหาของนักเรียน เช่น ในวิธีการที่ (1) พบว่ามีการแสดงสมการทางคณิตศาสตร์เพื่อแทนความสัมพันธ์เชิงปริมาณ การแสดงแทน และการคำนวณด้วยภาพในการหาพื้นที่

สรุปผลการวิจัย

จากผลวิจัย ลักษณะแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนเกี่ยวกับการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ใช้พื้นที่วงกลม พบว่า มีวิธีการคิดแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นทั้งหมด 21 วิธี โดยเมื่อนำแนวคิดทั้ง 21 วิธี ไปวิเคราะห์เพื่อระบุลักษณะแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ตามกรอบแนวคิดของ Isoda & Katagiri (2012) พบว่ามีแนวคิดทางคณิตศาสตร์ 8 แนวคิด ได้แก่ แนวคิดเกี่ยวกับกลุ่ม แนวคิดเกี่ยวกับหน่วย แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงแทน แนวคิดเกี่ยวกับการดำเนินการ แนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนวิธี แนวคิดเกี่ยวกับการประมวลค่า แนวคิดเกี่ยวกับคุณสมบัติพื้นฐาน แนวคิดเกี่ยวกับการแสดงออกทางสัญลักษณ์ โดยไม่ปรากฏแนวคิดเกี่ยวกับการคิดเชิงฟังก์ชันในกลุ่มเป้าหมาย แต่เมื่อเปรียบเทียบแนวคิดระหว่างนักเรียนทั้งสองห้องเรียน พบว่าโดยรวมมีลักษณะวิธีการคิดที่หลากหลายและมีส่วนที่ใกล้เคียงกันภายใต้แนวคิดทางคณิตศาสตร์

อภิปรายผล

จากผลการวิจัย แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระหว่างการแก้ปัญหาที่มีความหลากหลาย แม้ปัญหาที่ใช้จะมีคำตอบที่ถูกต้องเพียงหนึ่งคำตอบก็ตาม ความหลากหลายของแนวคิดดังกล่าว สะท้อนให้เห็นถึงบทบาทของชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่เน้นการแก้ปัญหา แม้ว่าการวิจัยนี้จะเก็บข้อมูลจากบริบทของโรงเรียนในประเทศญี่ปุ่น แต่ผลการวิจัยสอดคล้องกับงานวิจัยหลายชิ้นในประเทศไทย ซึ่งดำเนินการในบริบทของชั้นเรียนที่ยึดหลักการของการจัดการเรียนรู้โดยเน้นการแก้ปัญหา เช่น จตุพร นาสินสร้อย และคณะ (2558) ระบุว่า ในบริบทชั้นเรียนที่ใช้วิธีการแบบเปิด ซึ่งเป็นชั้นเรียน เน้นการแก้ปัญหา นักเรียนสามารถคิดในประเด็นเกี่ยวกับการคูณได้อย่างหลากหลาย สะท้อนให้เห็นถึงศักยภาพในการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ต่อมาจากงานศึกษาของ Changsri et al. (2024) พบว่า การใช้แพทเทิร์นบล็อกเป็นเครื่องมือช่วยพัฒนาทักษะการคิดขั้นสูงของนักเรียน โดยผสมผสานการจัดการเรียนรู้ร่วมกับการศึกษาชั้นเรียนแบบเปิด ส่งผลให้นักเรียนสามารถเข้าใจแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้อย่างลึกซึ้งและมีการพัฒนากระบวนการคิดคณิตศาสตร์อย่างเป็นระบบ ขณะที่ Inprasitha et al. (2024) ชี้ให้เห็นว่า ในบริบทของเทศกาลคณิตศาสตร์ซึ่งมีการให้โจทย์เพื่อให้ นักเรียนแก้ปัญหา นักเรียนได้แสดงแนวคิดและสมรรถนะทางคณิตศาสตร์ที่หลากหลาย กล่าวคือ ชั้นเรียนที่เน้นการแก้ปัญหาเป็นหนึ่งในปัจจัยที่สำคัญที่ทำให้นักเรียนวิธีการคิดและแนวคิดที่หลากหลาย และเมื่อพิจารณาถึงหลักในหลักการ (Principle) ที่สำคัญของชั้นเรียนดังกล่าว พบว่า ชั้นเรียนที่เน้นการแก้ปัญหา เปิดโอกาสให้นักเรียนได้ใช้กระบวนการคิดที่หลากหลาย โดยไม่ถูกจำกัด ด้วยวิธีการที่ตายตัว ส่งผลให้ผู้เรียนสามารถพัฒนาแนวคิดทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบของตนเอง (Hino, 2007; Takahashi, 2021; Inprasitha, 2022; ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์, 2565)

อย่างไรก็ตาม จากผลการวิเคราะห์ที่ไม่ปรากฏการใช้แนวคิดเกี่ยวกับการคิดเชิงฟังก์ชัน อาจเป็นผลมาจากลักษณะของโจทย์ที่ไม่เอื้อต่อการพิจารณาความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน โดยแนวคิดดังกล่าวเกี่ยวข้องกับการพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณสองปริมาณที่สามารถนิยามได้ด้วยกฎหรือฟังก์ชัน (Isoda & Katagiri, 2012) แต่ในแผนการเรียนรู้ที่ใช้เก็บข้อมูลไม่มีลักษณะของความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันอย่างชัดเจน จึงไม่พบแนวคิดดังกล่าวในการวิเคราะห์ ทั้งนี้ยังไม่สามารถสรุปได้อย่างชัดเจนว่า การแสดงแนวคิดที่แตกต่างกันของนักเรียนเป็นผลจากความเข้าใจเชิงลึกของผู้เรียน หรือเกิดจากแนวทางการจัดการเรียนรู้ เมื่อพิจารณาในรายละเอียดของแนวคิด จะเห็นว่าชั้นเรียนที่นำมาวิเคราะห์ในครั้งนี้มีความหลากหลายของแนวคิดคล้ายกับงานวิจัยก่อนหน้านี้ แต่มีรายละเอียดเชิงกระบวนการมากกว่า โดยนักเรียนได้ใช้แนวคิดทางคณิตศาสตร์อย่างหลากหลายในการแก้ปัญหา ซึ่งสะท้อนถึงกระบวนการเรียนรู้ที่เกิดขึ้นจริงในชั้นเรียน แตกต่างจากการแก้โจทย์ปัญหาแบบเดิมที่คร่ำครึติดสินเพียงแค่ถูกหรือผิด โดยเน้นผลลัพธ์ปลายทางเท่านั้น แต่จากการวิเคราะห์ในงานวิจัยนี้

แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีกระบวนการคิดที่มีรายละเอียดชัดเจน ซึ่งสามารถนำไปเชื่อมโยงกับการพัฒนาการประเมินระหว่างเรียนได้

นอกจากนี้ การจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่เน้นการแก้ปัญหา การเตรียมแผนการสอนมีความสำคัญอย่างยิ่ง (Takhashi, 2021; Inprasitha, 2022) เพราะเป็นเครื่องมือช่วยในการประเมินระหว่างเรียน โดยในกระบวนการเตรียมแผนจะมีการออกแบบสถานการณ์ปัญหาและคาดการณ์แนวคิดของนักเรียน เพื่อรองรับสิ่งที่จะเกิดขึ้นในชั้นเรียน (Hino, 2007) ซึ่งประเด็นนี้สะท้อนชัดจากผลการวิจัยที่ได้ อีกประเด็นสำคัญที่พบ คือ แม้ปัญหาที่ใช้ในการวิจัยจะอยู่ในโดเมนของเรขาคณิต แต่นักเรียนสามารถเชื่อมโยงแนวคิดไปสู่พีชคณิตและแนวคิดทางคณิตศาสตร์อื่นๆ ได้อย่างหลากหลาย (Cai & Hwang, 2022) แสดงให้เห็นถึงความสามารถในการบูรณาการความรู้ข้ามโดเมน และความยืดหยุ่นทางความคิดทางคณิตศาสตร์ ซึ่งถือเป็นศักยภาพสำคัญที่ควรส่งเสริมในชั้นเรียน โดยเฉพาะในบริบทของการประเมินผลการเรียนรู้ เช่น การประเมินโดยใช้โจทย์ปัญหา (Mathematical problem-posing assessment) ที่เน้นการคิดสร้างสรรค์ การสังเคราะห์ความรู้ และการตั้งสมมติฐานใหม่ ซึ่งเป็นทักษะสำคัญในการแก้ปัญหาในยุคดิจิทัล เนื่องจากปัญหาใหม่ๆ อาจแฝงอยู่ในโจทย์เดิม การเปิดโอกาสให้นักเรียนใช้กระบวนการดังกล่าวจะช่วยให้สามารถแก้ปัญหาได้จากหลากหลายมุมมอง ไม่จำกัดเฉพาะมุมที่ตนคุ้นเคยเท่านั้น

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะในการนำงานวิจัยไปใช้

1.1 ผลการวิจัยสามารถนำไปใช้เป็นแนวทางในการคาดการณ์แนวคิดทางคณิตศาสตร์ เพื่อสนับสนุนการออกแบบการจัดการเรียนรู้ และการวัดและประเมินผลที่เน้นพัฒนากระบวนการคิด

1.2 การจำแนกแนวคิดทางคณิตศาสตร์ ช่วยให้ครูสามารถวิเคราะห์ระดับการคิดของผู้เรียน และใช้ข้อมูลดังกล่าวในการออกแบบสถานการณ์การเรียนรู้ที่เหมาะสม

2. ข้อเสนอแนะสำหรับการวิจัยครั้งต่อไป

สำหรับการวิจัยครั้งถัดไปควรเก็บข้อมูลเชิงลึก เช่น ข้อมูลที่บันทึก การสนทนา สีนัย ทำทางของนักเรียน ขณะแก้ปัญหา เพื่อที่จะเข้าใจกระบวนการคิดของนักเรียนอย่างลึกซึ้ง

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับงบประมาณสนับสนุนจากทุนสนับสนุนมูลฐาน (Fundamental Fund: FF) มหาวิทยาลัยขอนแก่น และศูนย์วิจัยคณิตศาสตร์ศึกษา มหาวิทยาลัยขอนแก่น

เอกสารอ้างอิง

- จตุพร นาสินสร้อย, นฤมล ช่างศรี และไมตรี อินทร์ประสิทธิ์. (2558). การคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่อง การคูณ ในชั้นเรียนที่ใช้การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด. *วารสารศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น*, 38(3), น. 133-142.
- ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์. (2565). *กระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียน* (พิมพ์ครั้งที่ 2). ขอนแก่น: ไอ-ปริ้นท์ ดีไซน์.
- Cai, J., & Hwang, S. (2022). Seeing algebra in arithmetic through mathematical problem posing. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 33(3), pp. 309-329. Retrieved February 6, 2025, from <https://doi.org/10.29275/jerm.2022.32.3.309>
- Changsri, N., Inprasitha, M., Tang, K., Boonsena, N., & Pattanajak, A. (2024). The use of pattern blocks in developing students' higher-order thinking skills. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 13(4), pp. 246-264. Retrieved February 6, 2025, from <https://doi.org/10.1108/IJLLS-04-2023-0038>
- Cornish, F., Gillespie, A., & Zittoun, T. (2013). Collaborative analysis of qualitative data. In U. Flick (Ed.), *The SAGE handbook of qualitative data analysis*. New York: SAGE.
- Creswell, J. W., & Poth, C. N. (2023). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches* (5th ed.). Thousand Oaks, Canada: SAGE Publications.
- Fujii, T. (2020). Misconceptions and alternative conceptions in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 625-627). Cham, Switzerland: Springer. Retrieved February 6, 2025, from https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_114
- Hino, K. (2007). Toward the problem-centered classroom: Trends in mathematical problem solving in Japan. *ZDM Mathematics Education*, 39, pp. 503-514. Retrieved February 6, 2025, from <https://doi.org/10.1007/s11858-007-0052-1>
- Inprasitha, M. (2022). Lesson study and open approach development in Thailand: a longitudinal study. *International Journal for Lesson & Learning Studies*, 11(5), pp. 1-15. Retrieved February 6, 2025, from <https://doi.org/10.1108/IJLLS-04-2021-0029>

- Inprasitha, A., Changsri, N., & Inprasitha, M. (2024). An assessment of students' mathematical competency through the mathematics festival. In *The Asian Conference on Education 2023: Official Conference Proceedings* (pp. 1577-1586). Tokyo, Japan: IAFOR. Retrieved February 6, 2025, from <https://doi.org/10.22492/issn.2186-5892.2024.131>
- Intaros, P., & Inprasitha, M. (2019). How students' mathematical ideas emerged through flow of lesson in classroom using lesson study and open approach. *Psychology*, 10(6), pp. 864-876. Retrieved February 6, 2025, from <https://doi.org/10.4236/psych.2019.106056>
- Isoda, M. (Ed.). (1996). *Problem-solving approach with diverse ideas and dialectic discussions: Conflict and appreciation based on the conceptual and procedural knowledge*. Tokyo: Meijitosyo.
- Isoda, M., & Katagiri, S. (2012). *Mathematical thinking: How to develop it in the classroom*. Singapore: World Scientific.
- Mayring, P. (2022). *Qualitative content analysis: A step-by-atep guide*. New York: SAGE.
- Ministry of Education Culture Sports Science and Technology. (2018). *Explanation of the Secondary School Curriculum Guidelines, Mathematics Edition*. Tokyo: Bunkyo.
- National Research Council [NRC]. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academies Press.
- Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD]. (2023). *PISA 2022 results (Volume I): The state of learning and equity in education*. France: PISA, OECD. Retrieved February 6, 2025, from <https://doi.org/10.1787/53f23881-en>
- Prakitipong, N., & Nakamura, S. (2006). Analysis of mathematics performance of grade five students in Thailand using Newman procedure. *Journal of International Cooperation in Education*, 9(1), pp. 111-122.
- Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 10(3), pp. 163-172. Retrieved February 6, 2025, from <https://doi.org/10.2307/748804>

- Rasmussen, K., & Isoda, M. (2018). The intangible task-A revelatory case of teaching mathematical thinking in Japanese elementary schools. *Research in Mathematics Education*, 21(1), pp. 43-59. Retrieved February 6, 2025, from <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1555714>
- Ryan, J., & Williams, J. (2007). *Children's mathematics 4-15: Learning from errors and misconceptions*. United Kingdom: McGraw-Hill Education.
- Smith, J. P., III, diSessa, A. A., & Roschelle, J. (1994). Misconceptions reconceived: A constructivist analysis of knowledge in transition. *The Journal of the Learning Sciences*, 3(2), pp. 115-163. Retrieved February 6, 2025, from <https://www.jstor.org/stable/1466679>
- Takahashi, A. (2021). *Teaching mathematics through problem-solving: A pedagogical approach from Japan*. New York, NY: Routledge.
- Wittmann, E. C. (2021). *Connecting mathematics and mathematics education: Collected papers on mathematics education as a design science*. Cham, Switzerland: Springer.