ผลต่างที่เท่ากันในชุดของลำดับ

รศ.ประสิทธิ์ กิจจนศิริ

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่

ผลต่างที่เท่ากันในชุดของลำดับ

รศ.ประสิทธิ์ กิจจนศิริ
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่

บทคัดย่อ

ในการศึกษาเกี่ยวกับลำดับของจำนวนต่างๆ ปรากฏว่าผลต่างของจำนวนที่อยู่ถัดกันในลำดับชุดเดียวกันอาจมีค่าเท่ากันหรืออาจแตกต่างกัน ลำดับ 1, 3, 5, 7, 9, ... มีผลต่างของจำนวนที่อยู่ถัดกันเป็น 2, 2, 2, 2, 2, ... ซึ่งมีค่าเท่ากันทั้งหมด สำหรับลำดับ 1, 4, 9, 16, 25, ... มีผลต่างของจำนวนที่อยู่ถัดกันเป็น 3, 5, 7, 9, 11, ... กรณีที่ผลต่างดังกล่าวมีค่าแตกต่างกัน เมื่อนำผลต่างเหล่านั้นมาจัดเรียงเป็นลำดับชุดใหม่และหาผลต่างของจำนวนที่อยู่ถัดกันในลำดับชุดใหม่นั้นอาจได้ผลต่างที่เท่ากันหรืออาจไม่เท่ากัน เป็นเช่นนี้เรื่อยไปจนกระทั่งได้ผลต่างที่เท่ากันทั้งหมดและไม่เป็นศูนย์ ผลต่างที่เท่ากันที่ได้มาจากลำดับต่างชุดกันนั้นบางกรณีมีค่าต่างกันแต่บางกรณีจะมีค่าเท่ากันและยังปรากฏอีกว่าผลต่างที่เท่ากันที่ได้มาจากลำดับชุดที่ต่างกันนั้นอาจได้มาจากจำนวนครั้งที่แตกต่างกัน ในการหาผลต่างดังกล่าวสำหรับลำดับที่อยู่ในรูป 1^a, 2^a, 3^a, 4^a, 5^a, ... เมื่อ a เป็นจำนวนเต็มบวก ปรากฏว่าได้ผลต่างที่เท่ากันมีความสัมพันธ์กับค่าของ a และผลต่างดังกล่าวอยู่ในลำดับชุดใหม่ที่มีอันดับต่างๆ กัน ซึ่งสัมพันธ์กับค่าของ a อีกด้วย

คำสำคัญ : ลำดับ เลขยกกำลัง ผลต่างที่เท่ากัน

ABSTRACT

For a given sequence of number a_1, a_2, a_3, ..., the difference between a_i and a_{i+1} may not equal for each i=1, 2, 3, ... For example, a sequence 1, 3, 5, 7, 9, ... We see that the difference between a_i and the next number is 2, 2, 2, 2, 2, ..., but for a sequence 1, 4, 9, 16, 25, ... we get a sequence 3, 5, 7, 9, 11, ... In the latter case that we get a non-constant sequence, we can continue the same arguments until we get a non-zero constant sequence c, c, c,... where $c \neq 0$.

In this research, we consider a sequence 1^a, 2^a, 3^a, 4^a, 5^a, ... where a is a positive integer. We describe the relations between a and a sequence of the difference of a^i and the next number.

Keyword : Sequence, Exponential, Equal Difference

บทนำ

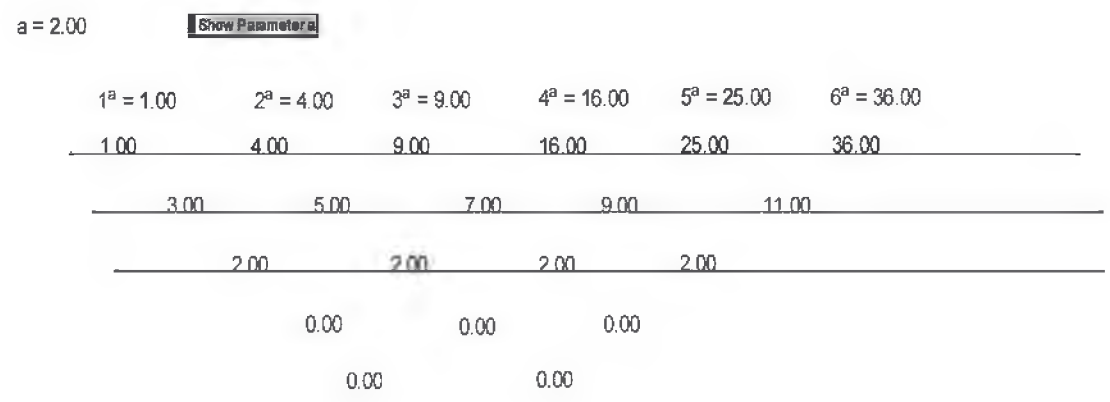
จำนวนที่ปรากฏอยู่ในลำดับต่างๆ เมื่อนำมาหาผลต่างของจำนวนที่อยู่ถัดกันโดยไม่คิดเครื่องหมายอาจมีค่าเท่ากันหรืออาจแตกต่างกัน กรณีที่ผลต่างดังกล่าวมีค่าแตกต่างกัน เมื่อนำผลต่างเหล่านั้นมาจัดเรียงเป็นลำดับชุดใหม่แล้วหาผลต่างของจำนวนที่อยู่ถัดกันในลำดับชุดใหม่นั้น อาจได้ผลต่างที่เท่ากันหรือไม่เท่ากันอีกเป็นเช่นนี้เรื่อยไปจนกระทั่งได้ผลต่างเท่ากันทั้งหมดและไม่เป็นศูนย์ ดังเช่น 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, ... ผลต่างของจำนวนที่อยู่ถัดกันได้แก่ 3, 5, 7, 9, ... และเมื่อหาผลต่างของจำนวนที่อยู่ถัดกันในลำดับชุดที่ได้ใหม่ดังกล่าว จะได้ 2, 2, 2, ... ซึ่งเท่ากันหมด เห็นได้ว่าผลต่างที่ได้ในครั้งแรกแตกต่างกัน สำหรับผลต่างที่ได้ในครั้งที่สองมีค่าเท่ากันหมดและไม่เป็นศูนย์ แต่ลำดับ 1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, ... คำนวณหาผลต่างครั้งแรกเป็น 7, 19, 37, 61, 91, ... เมื่อนำมาหาผลต่างครั้งต่อไปจะได้ดังนี้ 12, 18 24, 30, ... และจะได้ผลต่างในครั้งที่สามเป็น 6, 6, 6, ... ซึ่งเท่ากันหมด สำหรับลำดับในชุดอื่นๆ ในรูป 1^a, 2^a, 3^a, 4^a, 5^a, ... อาจได้ผลต่างที่เท่ากันหมดเป็นเท่าไรและในครั้งที่เท่าไรนั้น ขึ้นอยู่กับค่าของ a

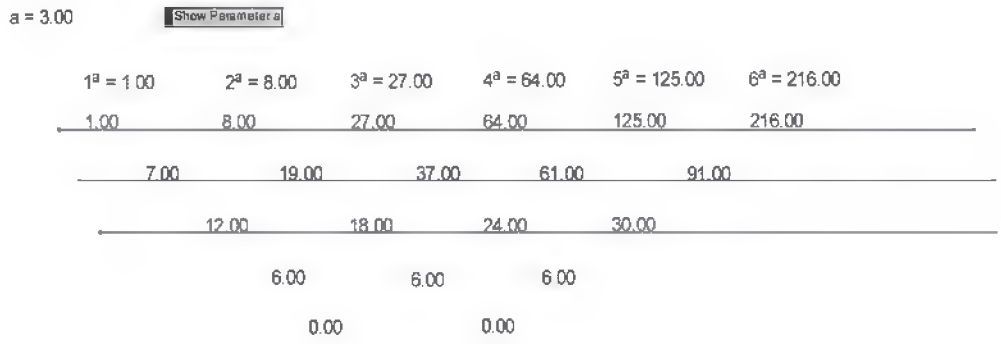
วัตถุประสงค์ของการวิจัย

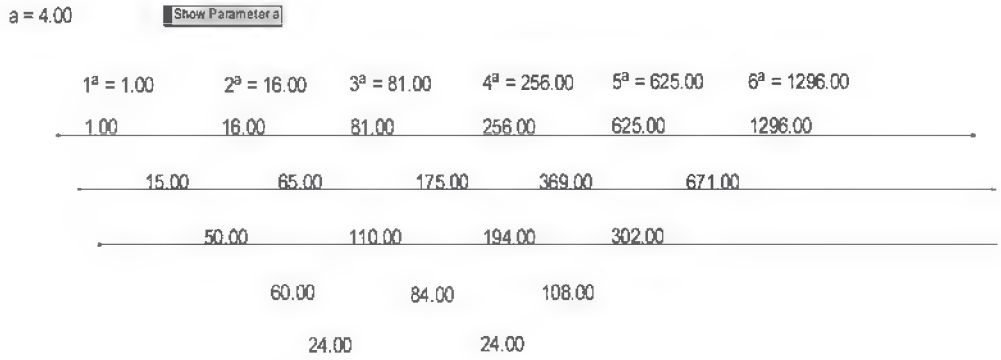
เพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนที่เป็นเลขยกกำลังกับค่าของผลต่างที่เท่ากันหมดในชุดสุดท้ายของลำดับที่อยู่ในรูป 1^a,2^a,3^a,4^a, 5^a, ... เมื่อ a เป็นจำนวนเต็มบวก

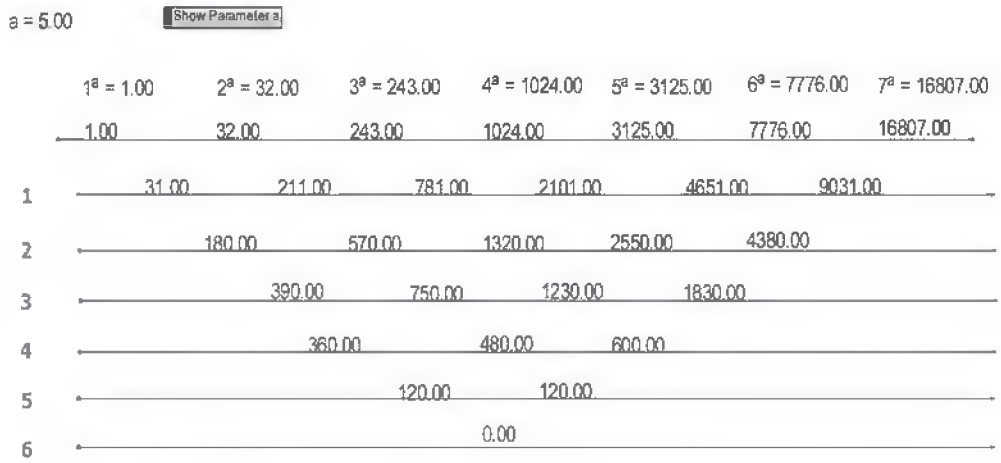
วิธีดำเนินการวิจัย

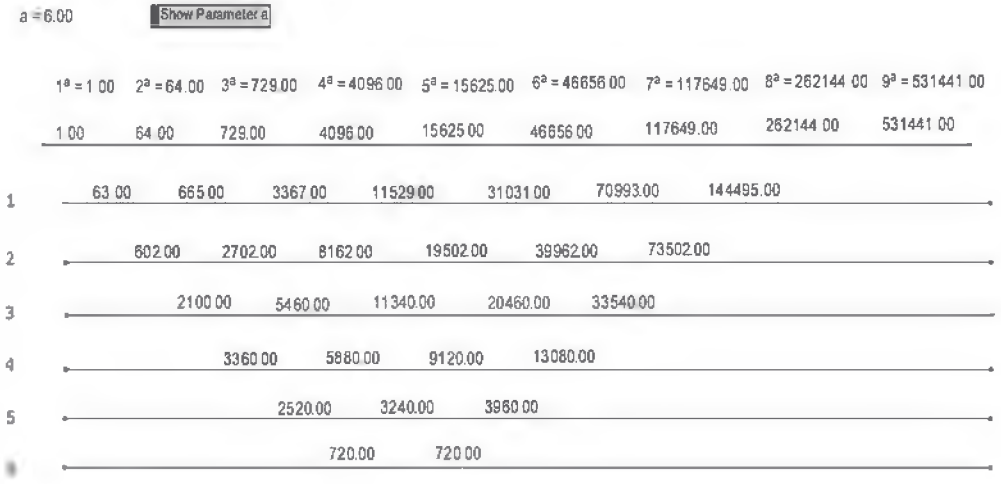
กำหนดลำดับในรูป 1^a,2^a,3^a,4^a,5^a, ... เมื่อ a เป็นจำนวนเต็มบวกแล้วหาผลต่างของจำนวนที่อยู่ถัดกันในแต่ละชุดจนกระทั่งได้ผลต่างที่เท่ากันทั้งหมด สังเกตค่าของผลต่างที่เท่ากันและค่าของ a นำมาวิเคราะห์หาความสัมพันธ์กัน ดังนี้




a = 3.00
Show Parameter a
1^a = 1.00
2^a = 8.00
3^a = 27.00
4^a = 64.00
5^a = 125.00
6^a = 216.00
1.00 8.00 27.00 64.00 125.00 216.00
7.00 19.00 37.00 61.00 91.00
12.00 18.00 24.00 30.00
6.00 6.00 6.00
0.00 0.00


a = 4.00
Show Parameter a
1^a = 1.00
2^a = 16.00
3^a = 81.00
4^a = 256.00
5^a = 625.00
6^a = 1296.00
1.00 16.00 81.00 256.00 625.00 1296.00
15.00 65.00 175.00 369.00 671.00
50.00 110.00 194.00 302.00
60.00 84.00 108.00
24.00 24.00


a = 5.00
Show Parameter a
1^a = 1.00
2^a = 32.00
3^a = 243.00
4^a = 1024.00
5^a = 3125.00
6^a = 7776.00
7^a = 16807.00
1.00 32.00 243.00 1024.00 3125.00 7776.00 16807.00
1 31.00 211.00 781.00 2101.00 4651.00 9031.00
2 180.00 570.00 1320.00 2550.00 4380.00
3 390.00 750.00 1230.00 1830.00
4 360.00 480.00 600.00
5 120.00 120.00
6 0.00


a = 6.00
Show Parameter a
1^a = 1.00
2^a = 64.00
3^a = 729.00
4^a = 4096.00
5^a = 15625.00
6^a = 46656.00
7^a = 117649.00
8^a = 262144.00
9^a = 531441.00
1.00 64.00 729.00 4096.00 15625.00 46656.00 117649.00 262144.00 531441.00
1 63.00 665.00 3367.00 11529.00 31031.00 70993.00 144495.00
2 602.00 2702.00 8162.00 19502.00 39962.00 73502.00
3 2100.00 5460.00 11340.00 20460.00 33540.00
4 3360.00 5880.00 9120.00 13080.00
5 2520.00 3240.00 3960.00
6 720.00 720.00

พิจารณาลำดับ $1^a, 2^a, 3^a, 4^a, 5^a, \ldots$

ชุดที่ 1 ของผลต่างเป็น

$$2^a-1^a, 3^a-2^a, 4^a-3^a, 5^a-4^a, 6^a-5^a, \ldots$$

ชุดที่ 2 ของผลต่างเป็น

$$(3^a-2\cdot 2^a+1^a),(4^a-2\cdot 3^a+2^a),(5^a-2\cdot 4^a+3^a),(6^a-2\cdot 5^a+4^a),\ldots$$

ชุดที่ 3 ของผลต่างเป็น

$$(4^a-3\cdot 3^a+3\cdot 2^a-1^a),(5^a-3\cdot 4^a+3\cdot 3^a-2^a),(6^a-3\cdot 5^a+3\cdot 4^a-3^a),\ldots$$

ชุดที่ 4 ของผลต่างเป็น

$$(5^a-4\cdot 4^a+6\cdot 3^a-4\cdot 2^a+1^a),(6^a-4\cdot 5^a+6\cdot 4^a-4\cdot 3^a+2^a),\ \ldots$$

ในกรณีที่ a=1

ได้ชุดที่ 1 ของผลต่างเป็น $2^1-1^1 = 1$

ในกรณีที่ a=2

ได้ชุดที่ 2 ของผลต่างเป็น $3^2-2\cdot 2^2+1^2 = 2$

ในกรณีที่ a=3

ได้ชุดที่ 3 ของผลต่างเป็น $4^3-3\cdot 3^3+3\cdot 2^3-1^3 = 6$

ในกรณีที่ a=4

ได้ชุดที่ 4 ของผลต่างเป็น $5^4-4\cdot 4^4+6\cdot 3^4-4\cdot 2^4+1^4 = 24$

สังเกตเห็นว่า ได้ผลต่างเท่ากันในชุดที่เท่าไรนั้นขึ้นอยู่กับค่าของ a เช่นในกรณีที่ a=3 ได้ผลต่างเท่ากันในชุดที่ 3 เป็นต้น สำหรับกรณีที่ a=1 ย่อมได้ผลต่างเท่ากันในชุดที่ 1 และจะได้ค่าของผลต่างเป็น 1 ทั้งนี้เพราะว่าผลต่างในชุดที่ 1 คือ

$2^a-1^a, 3^a-2^a, 4^a-3^a, 5^a-4^a, \ldots$ ซึ่งได้เป็น $2^1-1^1, 3^1-2^1, 4^1-3^1, 5^1-4^1, \ldots$

นั่นคือได้ผลต่างเป็น 1, 1, 1, 1, ... ซึ่งเป็นผลต่างชุดที่ 1

ในกรณีที่ a เป็นจำนวนเต็มซึ่งมากกว่า 1 ย่อมได้ผลต่างที่เท่ากันอยู่ในชุดที่ 2 หรือ 3 หรืออื่นๆ

ต่อไปนี้จะวิเคราะห์ผลต่างของจำนวนที่อยู่ถัดกันในลำดับชุดต่างๆ โดยพิจารณาผลต่างที่ได้ในชุดที่ 2 ของลำดับ $1^a, 2^a, 3^a, 4^a, 5^a, \ldots$ ดังนี้
สำหรับผลต่างที่ได้ในชุดที่ 2 เมื่อ a=2 ดังนี้

$$(3^a-2\cdot 2^a+1^a),(4^a-2\cdot 3^a+2^a),(5^a-2\cdot 4^a+3^a),(6^a-2\cdot 5^a+4^a),\ldots$$
$$=(3^2-2\cdot 2^2+1^2),(4^2-2\cdot 3^2+2^2),(5^2-2\cdot 4^2+3^2),(6^2-2\cdot 5^2+4^2),\ldots$$

พิจารณา $3^2-2\cdot 2^2+1^2$

$$= (1)\frac{2!}{2!}(3)^2+(-1)\frac{2!}{(2-1)!}(2)^2+(-1)^2\frac{2!}{2!}(1)^2$$

เขียนให้อยู่ในอีกรูปแบบหนึ่งได้เป็น

$$(-1)^0\binom{2}{0}(3)^2+(-1)^1\binom{2}{1}(2)^2+(2-1)^2\binom{2}{2}(1)^2$$
$$=\sum_{m=0}^{2}(-1)^m\binom{2}{m}(2-m+1)^2$$

สำหรับผลต่างที่ได้ในชุดที่ 3 เมื่อ a=3 ดังนี้

$$(4^a-3\cdot 3^a+3\cdot 2^a-1^a),(5^a-3\cdot 4^a+3\cdot 3^a-2^a),(6^a-3\cdot 5^a+3\cdot 4^a-3^a),\ldots$$
$$=(4^3-3\cdot 3^3+3\cdot 2^3-1^3),(5^3-3\cdot 4^3+3\cdot 3^3-2^3),(6^3-3\cdot 5^3+3\cdot 4^3-3^3),\ldots$$

พิจารณา $4^3-3\cdot 3^3+3\cdot 2^3-1^3$

$$= (1)\frac{3!}{3!}(4)^3+(-1)\frac{3!}{(3-1)!}(3)^3+(-1)^2\frac{3!}{(3-2)!}(2)^3+(-1)^3\frac{3!}{(3-3)!}(1)^3$$
$$= (-1)^0\binom{3}{0}(4)^3+(-1)^1\binom{3}{1}(3)^3+(2-1)^2\binom{3}{2}(2)^3+(2-1)^3\binom{3}{3}(1)^3$$
$$=\sum_{m=0}^{3}(-1)^m\binom{3}{m}(3-m+1)^3$$

สำหรับผลต่างที่ได้ในชุดที่ 4 เมื่อ a=4 ดังนี้

$$(5^a - 4\cdot 4^a + 6\cdot 3^a - 4\cdot 2^a + 1^a), (6^a - 4\cdot 5^a + 6\cdot 4^a - 4\cdot 3^a + 2^a), \ \ldots$$
$$= \ (5^4 - 4\cdot 4^4 + 6\cdot 3^4 - 4\cdot 2^4 + 1^4), (6^4 - 4\cdot 5^4 + 6\cdot 4^4 - 4\cdot 3^4 + 2^4), \ \ldots$$

พิจารณา $5^4 - 4\cdot 4^4 + 6\cdot 3^4 - 4\cdot 2^4 + 1^4$

$$= \ (1)\frac{4!}{4!}(5)^4 + (-1)\frac{4!}{(4-1)!}(4)^4 + (-1)^2\frac{4!}{(4-2)!}(3)^4 + (-1)^3\frac{4!}{(4-3)!}(2)^4 +$$

$$= \ \binom{4}{0}(4+1)^4 - \binom{4}{1}\cdot 4^4 + \binom{4}{2}\cdot 3^4 - \binom{4}{3}\cdot 2^4 + \binom{4}{4}1^4$$

$$= \ (-1)^0\binom{4}{0}(4+1)^4 + (-1)^1\binom{4}{1}\cdot 4^4 + (-1)^2\binom{4}{2}\cdot 3^4 + (-1)^3\binom{4}{3}\cdot 2^4 + (-1)^4\binom{4}{4}1^4$$

$$= \ \sum_{m=0}^{4}(-1)^m\binom{4}{m}(4-m+1)^4$$

ผลการวิจัย

สำหรับลำดับ $1^a, 2^a, 3^a, 4^a, 5^a, \ldots$

กรณี a=2 ผลต่างซึ่งไม่ใช่ศูนย์ที่เท่ากันในบรรทัดที่ 2 มีค่าเป็น

$$\sum_{m=0}^{2}(-1)^m\binom{2}{m}(2-m+1)^2 = 2 = 2!$$

a=3 ผลต่างซึ่งไม่ใช่ศูนย์ที่เท่ากันในบรรทัดที่ 3 มีค่าเป็น

$$\sum_{m=0}^{3}(-1)^m\binom{3}{m}(3-m+1)^3 = 6 = 3!$$

a=4 ผลต่างซึ่งไม่ใช่ศูนย์ที่เท่ากันในบรรทัดที่ 4 มีค่าเป็น

$$\sum_{m=0}^{4}(-1)^m\binom{4}{m}(4-m+1)^4 = 24 = 4!$$

สังเกตเห็นว่าผลต่างซึ่งไม่ใช่ศูนย์ที่เท่ากันในบรรทัดที่ a มีค่าเป็น a!
สำหรับลำดับในรูปแบบอื่น เช่น 2^a, 4^a, 6^a, 8^a, 10^a, ...
ได้ผลต่างซึ่งไม่ใช่ศูนย์ที่เท่ากันในบรรทัดที่ a มีค่าเป็น $a!\cdot 2^a$
เช่น a=2 ผลต่างซึ่งไม่ใช่ศูนย์ที่เท่ากันในบรรทัดที่ 2 มีค่าเป็น $2!\cdot 2^2 = 8$
a=3 ผลต่างซึ่งไม่ใช่ศูนย์ที่เท่ากันในบรรทัดที่ 3 มีค่าเป็น $3!\cdot 2^3 = 48$
a=4 ผลต่างซึ่งไม่ใช่ศูนย์ที่เท่ากันในบรรทัดที่ 4 มีค่าเป็น $4!\cdot 2^4 = 384$
a=5 ผลต่างซึ่งไม่ใช่ศูนย์ที่เท่ากันในบรรทัดที่ 5 มีค่าเป็น $5!\cdot 2^5 = 3840$

สำหรับลำดับในรูปแบบอื่น เช่น k^a, $(2k)^a$, $(3k)^a$, $(4k)^a$, $(5k)^a$, ... เมื่อ $k \neq 0$
ได้ผลต่างซึ่งไม่ใช่ศูนย์ที่เท่ากันในบรรทัดที่ a มีค่าเป็น $a!\cdot k^a$
เช่น a=2 ผลต่างซึ่งไม่ใช่ศูนย์ที่เท่ากันในบรรทัดที่ 2 มีค่าเป็น $2!\cdot k^2$
a=3 ผลต่างซึ่งไม่ใช่ศูนย์ที่เท่ากันในบรรทัดที่ 3 มีค่าเป็น $3!\cdot k^3$
a=4 ผลต่างซึ่งไม่ใช่ศูนย์ที่เท่ากันในบรรทัดที่ 4 มีค่าเป็น $4!\cdot k^4$
a=5 ผลต่างซึ่งไม่ใช่ศูนย์ที่เท่ากันในบรรทัดที่ 5 มีค่าเป็น $5!\cdot k^5$

สำหรับลำดับ 1^a, 3^a, 5^a, 7^a, 9^a, ... ได้ผลต่างซึ่งไม่ใช่ศูนย์ที่เท่ากันในบรรทัดที่ a เป็นอย่างเดียวกันกับลำดับ 2^a, 4^a, 6^a, 8^a, 10^a, ...

สรุปผล

ลำดับ 1^a, 2^a, 3^a, 4^a, 5^a, ...
ผลต่างซึ่งไม่ใช่ศูนย์ที่เท่ากันในบรรทัดสุดท้ายมีค่าเป็น a!
เช่น a=2 ผลต่างซึ่งไม่ใช่ศูนย์ที่เท่ากันในบรรทัดสุดท้ายมีค่าเป็น 2! = 2
a=3 ผลต่างซึ่งไม่ใช่ศูนย์ที่เท่ากันในบรรทัดสุดท้ายมีค่าเป็น 3! = 6
a=4 ผลต่างซึ่งไม่ใช่ศูนย์ที่เท่ากันในบรรทัดสุดท้ายมีค่าเป็น 4! = 24

สำหรับลำดับ 2^a, 4^a, 6^a, 8^a, 10^a, ...
ผลต่างซึ่งไม่ใช่ศูนย์ที่เท่ากันในบรรทัดสุดท้ายมีค่าเป็น $a!\cdot 2^a$
เช่น a=2 ผลต่างซึ่งไม่ใช่ศูนย์ที่เท่ากันในบรรทัดสุดท้ายมีค่าเป็น $2!\cdot 2^2 = 8$
a=3 ผลต่างซึ่งไม่ใช่ศูนย์ที่เท่ากันในบรรทัดสุดท้ายมีค่าเป็น $3!\cdot 2^3 = 48$
a=4 ผลต่างซึ่งไม่ใช่ศูนย์ที่เท่ากันในบรรทัดสุดท้ายมีค่าเป็น $4!\cdot 2^4 = 384$
a=5 ผลต่างซึ่งไม่ใช่ศูนย์ที่เท่ากันในบรรทัดสุดท้ายมีค่าเป็น $5!\cdot 2^5 = 3840$

สำหรับลำดับในรูปแบบอื่น เช่น k^a, $(2k)^a$, $(3k)^a$, $(4k)^a$, $(5k)^a$, ... เมื่อ $k \neq 0$
ได้ผลต่างซึ่งไม่ใช่ศูนย์ที่เท่ากันในบรรทัดที่ a มีค่าเป็น $a! \cdot k^a$
และสำหรับลำดับ 1^a, 3^a, 5^a, 7^a, 9^a, ...ได้ผลต่างซึ่ง**ไม่ใช่ศูนย์**ที่เท่ากันในบรรทัดสุดท้ายเป็นอย่างเดียวกันกับ ลำดับ 2^a, 4^a, 6^a, 8^a, 10^a, ... คือมีค่าเป็น $a! \cdot 2^a$

ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัยต่อไป

ลำดับที่มีรูปแบบอื่นๆ เช่น 1^a, 2^a, 4^a, 7^a, 11^a, ... จะมีผลต่างซึ่งไม่ใช่ศูนย์ที่เท่ากันเป็นเท่าไรและอยู่ในชุดที่เท่าไร

บทปริทัศน์

ผลต่างที่เท่ากันในชุดของลำดับ

โดย รศ.จักรภพ วงศ์ละคร
คณะเทคโนโลยีสารสนเทศและการสื่อสาร มหาวิทยาลัยแม่โจ้

การศึกษาความสัมพันธ์ของจำนวนและฟังก์ชัน มีความสำคัญอย่างยิ่งที่จะทำให้เข้าใจถึงพฤติกรรมและสร้างตัวแบบ (Model) ของปัญหาที่อยู่ในรูปแบบที่ซับซ้อนให้อยู่ในรูปแบบที่ง่าย ซึ่งจะต้องใช้กระบวนการสังเกต การเปรียบเทียบ การทดลอง ตลอดจนการคาดคะเน เพื่อให้ได้ความสัมพันธ์ที่เหมาะสมต่อการนำไปใช้แก้ปัญหา

ดังนั้นการวิจัยเรื่อง ผลต่างที่เท่ากันในชุดของลำดับ ของ รศ.ประสิทธิ์ กิจจนศิริ นับว่าเป็นแบบอย่างที่ดี ที่จะช่วยสร้างกระบวนการเรียนการสอน เพื่อเพิ่มทักษะกระบวนการทางวิทยาศาสตร์ในการแก้ปัญหาให้แก่ผู้เรียนในระดับการศึกษาตั้งแต่ขั้นพื้นฐานเพื่อประกอบการจัดการเรียนการสอนในกลุ่มสาระการเรียนรู้ จนถึงการนำไปประยุกต์ใช้กับความสัมพันธ์ของจำนวนและฟังก์ชันที่ซับซ้อนต่อไปได้เป็นอย่างดี