

การค้นพบรังสีเอกซ์และ กำเนิดผลึกวิทยารังสีเอกซ์ The Discovery of X ray and Origin of Crystallography

นิคม ชูศิริ*

สมบัติที่หลากหลายซึ่งแตกต่างกันมากมายของของแข็งสร้างความสนใจแก่ผู้คนนานนับศตวรรษ พัฒนาการด้านเทคโนโลยีที่เกี่ยวข้องกับของแข็งและโลหะผสมนำมนุษย์ไปสู่อารยธรรมสมัยใหม่ (Tipler, 1996) ความสมมาตรและความงดงามที่เกิดขึ้นเองตามธรรมชาติของผลึกเดี่ยวขนาดใหญ่ (large single crystal) ดึงดูดผู้คนไม่เสื่อมคลาย อย่างไรก็ตามตอนเริ่มแรก สมบัติเชิงโครงสร้างของของแข็งเหล่านี้ไม่เป็นที่เข้าใจโดยสิ้นเชิง จวบจนกระทั่งเกิดการค้นพบรังสีเอกซ์ การนำรังสีเอกซ์ไปประยุกต์ใช้หาโครงสร้างของของแข็งในระดับจุลภาคกลายเป็นพื้นฐานสำหรับการพัฒนาเทคโนโลยีสมัยใหม่ ปัจจุบันศาสตร์ด้านนี้ได้รับการพัฒนาเป็นสาขาหนึ่งในกลุ่มวิชาฟิสิกส์แผนใหม่ที่มีชื่อว่า “ผลึกวิทยารังสีเอกซ์” ในบทความนี้จะกล่าวถึงการค้นพบรังสีเอกซ์ และการนำรังสีเอกซ์นี้ไปประยุกต์ใช้หาโครงสร้างของของแข็งที่มีโครงสร้างเป็นผลึกพอสังเขป

การค้นพบของเรินต์เกน(Rontgen's Discovery)

ในช่วงครึ่งหลังของคริสต์ศตวรรษที่ 19 นักฟิสิกส์จำนวนมากกำลังตื่นตัวกับการศึกษารังสีแคโทด (cathode ray) ซึ่งเป็นรังสีที่เพิ่งค้นพบล่าสุด นักฟิสิกส์เหล่านั้นศึกษาสมบัติต่างๆ ของมันในหลายๆ ด้าน โดยเฉพาะอย่างยิ่งเพื่อหาข้อยุติที่ว่ารังสีแคโทดเป็นอนุภาคหรือคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า สมบัติเบื้องต้นเป็นที่ทราบกันดีว่ารังสีชนิดนี้เดินทางเป็นเส้นตรง เมื่อกระทบกับสิ่งกีดขวางหรือช่องแคบจะให้ภาพของเงาคมชัดบนฉาก ในช่วงปลายคริสต์ศตวรรษที่ 19 เป็นที่ประจักษ์ชัดว่ารังสีแคโทดดังกล่าวถูกดูดกลืนโดยสารต่างๆ โดยง่าย และอัตรา การดูดกลืนรังสีแคโทดนี้จะขึ้นกับปริมาณความต่างศักย์ที่ใช้เร่งหรือที่ก่อให้เกิดรังสี ยิ่งไปกว่านั้นยังพบ

* รองศาสตราจารย์ ดร. ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

อีกว่าสารจำพวกแก้วหรือผลึกของสารบางอย่างเมื่อกระทบกับรังสีแคโทดแล้วจะเปล่งแสงซึ่งอยู่ในช่วงที่ตามองเห็นได้ กระบวนการนี้มีชื่อเรียกว่าการวาวแสงหรือฟลูออเรสเซนซ์(fluorescence)

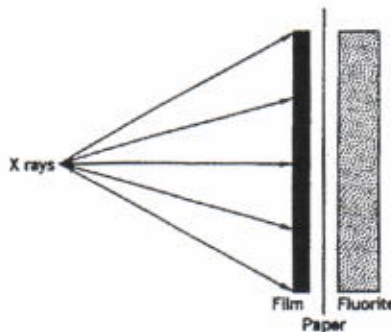
ในปีค.ศ. 1896 ทอมสัน(J.J. Thomson) ได้แสดงให้เห็นเป็นที่ประจักษ์ ณ มหาวิทยาลัยเคมบริดจ์ว่า รังสีแคโทดแท้ที่จริงแล้วประกอบด้วยอนุภาคซึ่งมีมวลขนาดเล็กและมีประจุลบ โดยขนาดมวลของมันประมาณ $1/1800$ เท่าของอะตอมที่มีขนาดเล็กที่สุดซึ่งก็คืออะตอมไฮโดรเจน ต่อมาสโตนีย์(J. Stoney) ได้เสนอตั้งชื่ออนุภาคดังกล่าวว่า “อิเล็กตรอน” ซึ่งเป็นชื่อที่ได้รับการยอมรับและใช้กันเรื่อยมาจนถึงปัจจุบัน ในปี ค.ศ.1910 มิลลิแกน(R. Millikan) ประสบผลสำเร็จในการหาค่าประจุของอิเล็กตรอนเป็นคนแรก โดยอาศัยชุดทดลองที่เขาสร้างขึ้นมา การทดลองนี้มีชื่อเสียงมาก รู้จักกันในนาม “การทดลองหยดน้ำมัน”(oil-drop experiment) ซึ่งจัดขึ้นที่มหาวิทยาลัยชิคาโก(University of Chicago) ผลการทดลองได้ค่าประจุของอิเล็กตรอนซึ่งเป็นที่ยอมรับกันในปัจจุบันคือ 4.803×10^{-10} esu หรือ 1.601×10^{-19} C

ในช่วงฤดูร้อนของปีค.ศ. 1895 มินกฟลิทส์ระดับศาสตราจารย์คนหนึ่งของมหาวิทยาลัยวูร์บวร์ก(University of Wurzburg)แห่งแคว้นบาวาเรีย ในเยอรมันชื่อ เรินต์เกน(Wilhelm Conrad Rontgen) เขาได้สร้างหลอดรังสีแคโทดโดยหลอดดังกล่าวถูกปิดล้อมอีกชั้นหนึ่งด้วยกล่องกระดาษแข็ง และวางแผนการทดลองเพื่อศึกษารังสีแคโทดในแง่ต่างๆ ไว้เป็นอย่างดี ตั้งใจว่าจะทำการทดลองในช่วงฤดูหนาวและฤดูใบไม้ร่วงที่กำลังจะมาถึง ทว่าการทดลองต่างๆ ที่ตั้งใจไว้ตามแผนถูกยกเลิกโดยสิ้นเชิง เนื่องจากเพียงวันสุดท้ายแรกของเดือนพฤศจิกายน (ช่วงต้นฤดูหนาว) ก็มีเหตุการณ์ประหลาดที่ไม่คาดฝันเกิดขึ้น กล่าวคือทุกครั้งที่เขาเปิดเครื่องเพื่อให้เกิดลำรังสีแคโทด(เป็นช่วงๆ อย่างไม่ต่อเนื่อง) จากซึ่งสร้างจากผลึกแบเรียมฟอสฟอเรสเซนซ์ซึ่งวางห่างจากหลอดรังสีแคโทดพอสมควรจะเรืองแสงออกมาทุกครั้งที่เปิดเครื่อง เป็นที่ชัดเจนสำหรับเรินต์เกนว่าการเรืองแสงของหลอดดังกล่าวมิได้เกิดจากรังสีแคโทดโดยตรง ทั้งนี้เนื่องจากรังสีแคโทดไม่อาจผ่าทะลุผ่านผนังหลอดหรือกล่องกระดาษที่ครอบหลอดออกไปยังจากได้ แม้จะทะลุออกไปได้บ้างก็ไปไม่ได้ไกล เนื่องจากรังสีแคโทดถูกดูดกลืนได้ง่าย แม้แต่อากาศรังสีแคโทดก็ผ่าทะลุไปได้เพียงเล็กน้อยเท่านั้น โดยการทดลองอย่างต่อเนื่องและรวดเร็วมันได้แสดงให้เห็นว่าการเรืองแสงดังกล่าวนี้มีแหล่งกำเนิดมาจากส่วนของแก้วซึ่งเป็นองค์ประกอบของหลอดตรงตำแหน่งที่รังสีแคโทดตกกระทบ การกระทบระหว่างรังสีรังสีแคโทดกับแก้วก่อให้เกิดรังสีชนิดหนึ่งซึ่งเดินทางเป็นเส้นตรง (ให้ภาพของเงาชัดเจนเดียวกับรังสีแคโทด) โดยรังสีนี้สามารถถูกดูดกลืนโดยสารเช่นกันแต่ถูกดูดกลืนได้น้อยกว่ารังสีแคโทด เรินต์เกนเรียกรังสีประหลาดนี้ว่ารังสีเอกซ์(x ray) และใช้ชื่อนี้ในการติดต่อสื่อสารตลอดจนเผยแพร่ผลงานการค้นพบของเขา นอกจากนั้นเขายังแสดงให้เห็นว่ารังสีเอกซ์สามารถทะลุผ่านกล้ามเนื้อหรือเนื้อเยื่อได้ดีกว่ากระดูก และยังได้แสดงภาพของฝ่ามือมนุษย์เป็นครั้งแรกในโลกโดยอาศัยรังสี(radiograph) นอกจากนั้นเรินต์เกนยังพบว่าการผลิตรังสีเอกซ์สามารถกระทำได้โดยให้รังสีแคโทดกระทบเป้าที่เป็นโลหะ โดยเป้าที่เป็นโลหะนี้จะให้ประสิทธิภาพดีกว่าเป้าที่เป็นแก้ว(การค้นพบรังสีเอกซ์ครั้งแรกเกิดจากรังสีแคโทดกระทบแก้ว) เรินต์เกนยังได้พยายามสร้างชุดทดลองแบบต่างๆ เพื่อดูพฤติกรรมการสะท้อน การหักเห และการเลี้ยวเบนของรังสีเอกซ์เช่นกัน ทว่าไม่ประสบผลสำเร็จใดๆ

ข่าวการค้นพบของเรินต์เกนแพร่กระจายออกไปเหมือนไฟไหม้ป่า ในไม่ช้าการประยุกต์รังสีเอกซ์ในด้านต่างๆ ก็บังเกิดขึ้น การถ่ายภาพโดยรังสีเอกซ์ถูกนำมาใช้ในวงการแพทย์ และวงการอุตสาหกรรมทั่วโลก เรินต์เกนเองยังดำเนินงานวิจัยของเขาต่อไป เขายังพบอีกว่าเป้าที่เป็นขั้วบวก(แอโนด)นั้นหากทำด้วยโลหะหนัก เช่น ฟอสฟอรัสจะให้รังสีเอกซ์ออกมาในปริมาณมาก มากกว่าเป้าที่เป็นโลหะเบา อาทิ อลูมิเนียม รังสีเอกซ์ยังมีสมบัติอื่นอีก เช่น ทำให้ฟิล์มถ่ายรูปมีสีดำ ทำให้ก๊าซแตกตัวเป็นไอออนในเส้นทางที่รังสีเอกซ์ผ่าน นอกจากนั้นเรินต์เกนยังพบ

ว่าอำนาจทะลุทะลวงหรือความแข็ง(hardness)ยังขึ้นกับความต่างศักย์ที่ป้อนให้กับขั้วบวกและขั้วลบของหลอดแคโทด โดยที่อำนาจทะลุทะลวงของรังสีเอกซ์จะเพิ่มขึ้นเมื่อความต่างศักย์เพิ่มขึ้น จากการค้นพบสมบัติที่สำคัญอย่างมากมายเกี่ยวกับรังสีเอกซ์ ส่งผลให้เรินต์เกนได้รับรางวัลโนเบลสาขาฟิสิกส์เป็นคนแรกของโลกในปี ค.ศ.1901 ในขณะเดียวกันช่วงเวลาดังกล่าวนักฟิสิกส์และนักการแพทย์ทั้งหลายก็คร่ำเคร่งอยู่กับการศึกษาและทดสอบรังสีชนิดใหม่นี้อย่างรีบเร่ง ในปี ค.ศ.1896 วิงเคลแมน(A. Winkelmann) และสตรัวเบล(R. Straubel)ได้วางฟิล์มถ่ายรูปไว้บนผลึกของแคลเซียมฟลูออไรด์(CaF_2)ในขณะที่มีรังสีเอกซ์กระทบผลึก ผลปรากฏว่าฟิล์มถ่ายรูปมีสีดำ และดำยิ่งกว่าการฉีกรังสีเอกซ์โดยไม่มีผลึก(ดูรูป 1 ประกอบ) เพื่อจะศึกษาธรรมชาติของการสะท้อนกลับ(backscatter)จากผลึกฟลูออไรด์ เขาทั้งสองนำแผ่นกระดาษสีดำวางชั้นระหว่างแผ่นฟิล์มกับผลึกฟลูออไรด์ ผลปรากฏว่าความดำของฟิล์มมีค่าลดลงจนใกล้เคียงกับการฉีกรังสีเอกซ์โดยไม่มีผลึก หลังจากนั้นนำกระดาษสีดำแผ่นเดิมไปกับรังสีเอกซ์ก่อนกระทบฟิล์ม(วางข้างหน้าฟิล์ม) ผลที่ได้กลับต่างออกไปจากกรณีแรก กล่าวคือแผ่นฟิล์มกลับดำมากกว่าปกติเหมือนไม่มีกระดาษสีดำมาบังรังสีเอกซ์แต่ประการใด ผลการทดลองสรุปได้ว่าผลึกฟลูออไรด์ไม่มีการสะท้อนกลับรังสีเอกซ์ แต่กลับกลายเป็นว่าผลึกฟลูออไรด์ได้ผลิตรังสีเอกซ์ชนิดใหม่ขึ้นมา โดยรังสีใหม่นี้เป็นรังสีเอกซ์ที่มีอำนาจทะลุทะลวงน้อยกว่ารังสีเอกซ์จากแหล่งผลิตโดยตรง กล่าวคือจัดเป็นรังสีเอกซ์ที่นุ่มกว่า(soften) สามารถถูกดูดกลืนได้โดยง่ายแม้กระทั่งแผ่นกระดาษ

รูป 1 (Azaroff, 1968)



การค้นพบดังกล่าวได้รับการขยายผลต่อไปอีกโดยบาร์คลา(C.G.Barkla) ในปี 1905 บาร์คลาพบว่ารังสีเอกซ์มีความคล้ายคลึงกับคลื่นแสง กล่าวคือมีสมบัติโพลาไรซ์และมีพฤติกรรมคล้ายคลื่นตามขวาง ยิ่งไปกว่านั้น บาร์คลายังพบองค์ประกอบของรังสีเอกซ์ที่มีความเข้มเป็นพิเศษที่ปลดปล่อยออกมาจากหลอดรังสีของเขาเมื่อเขาปฏิบัติการภายใต้เงื่อนไขที่เหมาะสม บาร์คลาประกาศอย่างชัดเจนว่าองค์ประกอบของรังสีเอกซ์ที่เข้มเป็นพิเศษนั้นขึ้นอยู่กับคุณลักษณะของเป้าที่ใช้ และยังได้เสนอว่ากลุ่มขององค์ประกอบของรังสีเอกซ์ที่พิเศษ(เป็นยอดแหลมสองยอดบนสเปกตรัมรังสีเอกซ์) มีความสัมพันธ์โดยตรงกับอิเล็กตรอนวงในสองวง (คือ อิเล็กตรอน K และ อิเล็กตรอน L) สอดคล้องกับแบบจำลองอะตอมของนีลโบห์ร(N. Bohr)ที่นำเสนอในเวลาต่อมา การที่บาร์คลามีส่วนทำให้ความเข้าใจเกี่ยวกับคุณลักษณะของรังสีเอกซ์ในด้านต่าง ๆ สมบูรณ์ขึ้นทำให้เขาได้รับรางวัลโนเบลสาขาฟิสิกส์ในปีค.ศ. 1917 อย่างไรก็ตามความสมบูรณ์ขององค์ความรู้เกี่ยวกับรังสีเอกซ์ถึงขั้นบริบูรณ์สุดขีดต้องรอจนกระทั่งมีการค้นพบการเลี้ยวเบนของรังสีเอกซ์

การค้นพบของเลาเอ(Laue's Discovery)

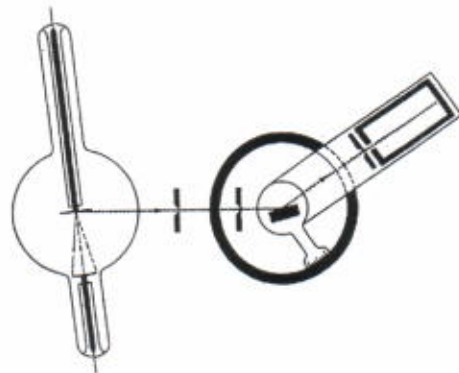
ในปี ค.ศ.1900 เรินต์เกนได้รับการแต่งตั้งให้เป็นประธานกลุ่มนักฟิสิกส์สาขาการทดลองในมหาวิทยาลัยมิวนิค(Munich University) เขาเป็นหัวหน้าดูแลหน่วยงานวิจัยของสถาบันที่ดำเนินการวิจัยในอาคารประวัติศาสตร์สามหลัง ผู้ร่วมงานของเขาในมหาวิทยาลัยประกอบไปด้วยบุคคลที่มีชื่อเสียงหลายท่านโดยเฉพาะอย่างยิ่งผู้ชำนาญการเกี่ยวกับแร่และนักผลึกวิทยานามโกรท(P. Groth) ผู้ซึ่งเป็นคนแรกที่จัดหมวดหมู่แร่ต่างๆ ตามคุณสมบัติทางเคมี โดยรวบรวมไว้ในหนังสือที่มีชื่อเสียงมากเล่มหนึ่งคือ Chemische Kristallographie นอกจากนั้นมหาวิทยาลัยมิวนิคยังประกอบด้วยกลุ่มของนักฟิสิกส์ทฤษฎีภายใต้การดูแลของซัมเมอร์เฟลด์ (A. Summerfeld) สมาชิกที่สำคัญประกอบด้วยเดบาย(P. Debye) และนักศึกษาปริญญาเอกจากมหาวิทยาลัยเบอร์ลินนามเลาเอ(M. Laue) ซึ่งทำงานภายใต้สถาบันแมกซ์พลังค์โดยเขาเข้าร่วมงานในปี ค.ศ.1909 ราวเดือนมกราคมของปี 1912 นักศึกษาปริญญาเอกของซัมเมอร์เฟลด์คนหนึ่งชื่ออีวาลด์(P.P. Ewald)ได้พบกับเลาเอและได้อภิปรายเพื่อหาข้อยุติในการวิเคราะห์เชิงทฤษฎีของเขาเกี่ยวกับการแผ่ของแสงผ่านผลึก โดยอีวาลด์กำลังอยู่ในช่วงเขียนวิทยานิพนธ์ระดับปริญญาเอก เลาเอมิได้ยุติเรื่องที่อภิปรายไว้เพียงแค่นั้น เขาคิดไปไกลกว่านั้นมากเกี่ยวกับแบบจำลองของผลึกที่อีวาลด์ใช้ กล่าวคือผลึกประกอบด้วยตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิกน้อยๆ วางห่างกันอย่างเป็นระเบียบแบบซ้ำรอยเดิมในปริภูมิสามมิติ ระยะห่างระหว่างตัวแกว่งกวัดประมาณ 10^{-8} cm เลาเอทราบแน่ชัดจากการทดลองของเรินต์เกนและจากแหล่งอื่นๆ ว่าความยาวคลื่นของรังสีเอกซ์อยู่ในระดับ 10^{-8} cm เช่นเดียวกัน ดังนั้นเลาเอกล้าที่จะคาดเดาได้ว่าโครงสร้างของผลึกน่าจะทำหน้าที่เป็นเกรตติงในอุดมคติของรังสีเอกซ์ในการเลี้ยวเบนเช่นเกรตติงของแสงที่ใช้เลี้ยวเบนแสง อย่างไรก็ตามแนวคิดของเลาเอได้รับการคัดค้านจากศาสตราจารย์ซัมเมอร์เฟลด์ด้วยยังมีปัญหาอยู่หลายแง่มุม แต่กระนั้นเลาเอสามารถโน้มน้าวให้ผู้ช่วยของซัมเมอร์เฟลด์และนักศึกษาปริญญาเอกของซัมเมอร์เฟลด์คล้อยตามแนวคิดของเขาคือ ฟรียดริคและนิปปิง(W. Friedrich and P. Knipping) ดังนั้นการทดลองเพื่อทดสอบแนวคิดของเลาเอจึงบังเกิดขึ้น หลังจากประสบความสำเร็จในการบันทึกผลของการเลี้ยวเบน (บนแผ่นฟิล์ม) ของรังสีเอกซ์จากผลึกคอปเปอร์ซัลเฟตในฤดูใบไม้ผลิของปี ค.ศ.1912 ในการอธิบายผลการทดลองเลาเอได้นำความรู้เกี่ยวกับการเลี้ยวเบนของแสงในหนึ่งและสองมิติไปประยุกต์ใช้กับการเลี้ยวเบนของรังสีเอกซ์ในผลึกซึ่งเกิดขึ้นในสามมิติ ในระหว่างทางกลับบ้านทุกๆ วัน เลาเอได้พยายามสร้างสูตรและมโนภาพพื้นฐานที่จำเป็นสำหรับอธิบายผลการทดลองดังกล่าว ทฤษฎีการเลี้ยวเบนของรังสีเอกซ์ของเลาเอได้รับการตีพิมพ์ในปี ค.ศ.1912 และส่งผลให้เขาได้รับรางวัลโนเบลสาขาฟิสิกส์ในปี ค.ศ.1914 มีจุดที่สำคัญจุดหนึ่งสมควรบันทึกไว้เกี่ยวเนื่องกับการค้นพบของเลาเอคือ อีวาลด์ผู้ซึ่งได้เรียนรู้เกี่ยวกับการค้นพบของเลาเอในปี 1912 หลังจากนั้นได้จากมิวนิคไปยังโกตติงเกน(Göttingen) เพื่อทำวิจัยหลังปริญญาเอก(post doc) ระหว่างเส้นทางกลับบ้านวันหนึ่งภายหลังเข้าฟังคำบรรยายจากศาสตราจารย์ซัมเมอร์เฟลด์ซึ่งมาเยี่ยมโกตติงเกนในฐานะแขก ซึ่งวันนั้นได้อภิปรายเกี่ยวกับการค้นพบของเลาเอ ช่วงกลับบ้านนั้นเองอีวาลด์เกิดความกระฉับกระเฉงเกี่ยวกับการเลี้ยวเบนของรังสีเอกซ์โดยผลึกว่ามันสามารถอธิบายได้ด้วยทฤษฎีอันหนึ่งซึ่งครั้งหนึ่งเขาพยายามอธิบายให้เลาเอสนใจ แต่ทว่าไร้ผล ผลวิเคราะห์การเลี้ยวเบนของรังสีเอกซ์ในมุมมองของอีวาลด์ได้รับการตีพิมพ์ในปี ค.ศ.1913 ประกอบด้วยมโนภาพของแลตทิซส่วนกลับ(reciprocal lattice) ซึ่งจะไม่กล่าวถึงในที่นี้

การมีส่วนร่วมของพ่อลูกตระกูลแบร็กก์(W.H. and W.L. Bragg's Contribution)

สเปกโตรมิเตอร์แบร็กก์(Bragg Spectrometer) หลังจากได้รับการแต่งตั้งเป็นศาสตราจารย์ทางฟิสิกส์แห่งมหาวิทยาลัยลีดส์ได้ไม่นาน ในปีค.ศ.1908 แบร็กก์ผู้พ่อ(W.H. Bragg)ได้หันเหความสนใจไปยังการแตกตัวเป็นไอออนของก๊าซอันเนื่องมาจากรังสีเอกซ์ จากการศึกษาดังกล่าวทำให้เขาเชื่อว่ารังสีเอกซ์เป็นอนุภาคมากกว่าคลื่น เนื่องจากกระบวนการแตกตัวเป็นไอออนดูเหมือนว่าเกิดการชน(หรือไม่ชน)กันระหว่างอนุภาคกับอนุภาค มีจำนวนอะตอมของก๊าซไม่มากนักที่เกิดกระบวนการดังกล่าว แนวคิดเกี่ยวกับความเป็นอนุภาคของรังสีเอกซ์ได้รับการสนับสนุนเป็นอย่างดีจากบุตรชายของเขา (W.L. Bragg) ซึ่งเพิ่งสำเร็จการศึกษาจากมหาวิทยาลัยเคมบริดจ์ ดังนั้นช่วงฤดูร้อนของปีค.ศ.1912 พ่อลูกคู่นี้ได้ร่วมกันวิเคราะห์ผลงานตีพิมพ์ของเลาเอในเรื่องการเลี้ยวเบนของรังสีเอกซ์อันเนื่องมาจาก ZnS(Zinchblende) แบร็กก์พยายามอธิบายว่าจุดต่างๆ บนแผ่นฟิล์ม(ลวดลายการเลี้ยวเบน)นั้นเกิดจากเม็ดหรืออนุภาคของรังสีเอกซ์ที่ลอดผ่านอุโมงค์หรือช่องว่างที่เกิดขึ้นระหว่างแถวของอะตอมในผลึก ในเวลาต่อมาแบร็กก์ผู้ลูกก็เข้าใจถึงความถูกต้องของสมมติฐานของเลาเอเกี่ยวกับธรรมชาติเชิงคลื่นของรังสีเอกซ์ และในช่วงฤดูหนาวของปี 1912 นั้นเองที่แบร็กก์ผู้ลูกได้นำเสนอคำอธิบายผลการทดลองของเลาเอในอีกมุมมองหนึ่งในรูปการสะท้อนของคลื่นรังสีเอกซ์อันเนื่องมาจากระนาบผลึกของอะตอม

งานของแบร็กก์ผู้ลูกสร้างความสนใจให้แก่วิลสัน(C.T.R. Wilson)แห่งห้องปฏิบัติการคาเวนดิช ณ มหาวิทยาลัยเคมบริดจ์เป็นอย่างมาก พร้อมทั้งแนะนำให้เขาทดสอบการสะท้อนของรังสีเอกซ์จากผิวหน้าผลึกที่มีรอยแตก การทดลองการสะท้อนของรังสีเอกซ์ต่อมาประสบผลสำเร็จเป็นอย่างมากและนำไปใช้ประโยชน์อย่างใหญ่หลวงอันเนื่องมาจากแบร็กก์ผู้พ่อที่สามารถสร้างสเปกโตรมิเตอร์รังสีเอกซ์ได้เป็นผลสำเร็จ สเปกโตรมิเตอร์ดังกล่าวสามารถตรวจวัดความถี่ หรือความยาวคลื่นและความเข้มของพลังงานรังสีเอกซ์ได้ เครื่องมือนี้ได้แสดงไว้ในรูปที่ 2 มันสามารถวัดความเข้มของรังสีเอกซ์ ณ มุมต่างๆ ที่สะท้อนมาจากระนาบของผลึก โดยระนาบ

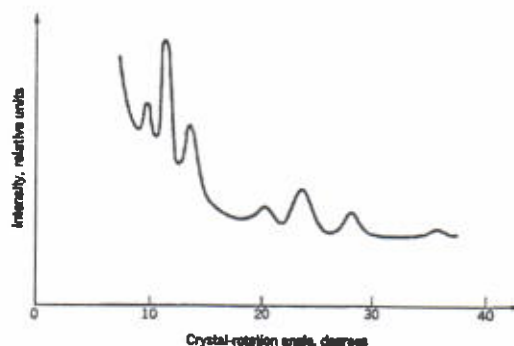
รูป 2 แสดงสเปกโตรมิเตอร์แบร็กก์
(Azaroff, 1968)



ดังกล่าวขนานกับผิวนอกของผลึก ดังที่ได้กล่าวมาสเปกโตรมิเตอร์นี้วัดความเข้ม ณ ความยาวคลื่นหรือความถี่ต่างๆ ได้ด้วย สำหรับความเข้มของรังสีเอกซ์ ณ มุมต่างๆ ซึ่งอาศัยฟลาตตินัมเป็นเป้าหมายหลังจากสะท้อนผ่านผลึกเกลือแกงได้แสดงไว้ในรูป 3 จากรูปที่ 3 จะเห็นได้ชัดว่าความเข้มของรังสีเอกซ์มิได้เปลี่ยนแปลงอย่างสม่ำเสมอเมื่อมุมหรือความยาวคลื่นเปลี่ยนแปลง ทว่าประกอบด้วยยอดแหลมหลายตำแหน่งซึ่งซ้อนทับกับความเข้มของรังสีภูมิหลัง(background)ที่แปรค่าน้อยๆ คำอธิบายปรากฏการณ์ดังกล่าวพร้อมทั้งความสัมพันธ์กับการเรียงตัวเป็น

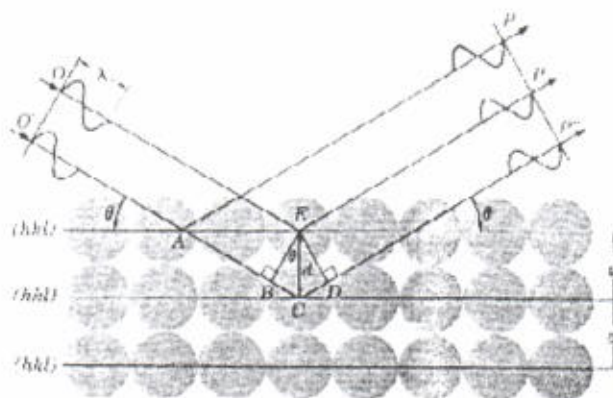
แถวของอะตอมในผลึกได้รับการศึกษาอย่างละเอียดภายใต้ความร่วมมืออย่างใกล้ชิดของสองพ่อลูก ส่งผลให้ทั้งคู่ได้รับรางวัลโนเบลสาขาฟิสิกส์ร่วมกันในปีค.ศ.1915

รูป 3 แสดงสเปกตรัมรังสีเอกซ์ที่สะท้อน
ผ่านผลึกเกลือแกงโดยอาศัยเป้าผลาตินัม
(Azaroff, 1968)



กฎของแบร็กก์(Bragg's Law) ชัดจำกัดอันหนึ่งที่ทำให้หมูนักฟิสิกส์ไม่สามารถเข้าใจถึงคุณลักษณะของรังสีเอกซ์ดีขึ้นหลังการค้นพบของเรินต์เกนก็คือ พวกเขาไม่สามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างความเข้มของรังสีเอกซ์ที่วัดได้กับพลังงานของมัน อาศัยสมมติฐานของพลังค์ซึ่งกล่าวว่า $E = h\nu = hc/\lambda$ ก็ยังคงเป็นหน้าที่ของแบร็กก์ที่จะต้องสร้างความสัมพันธ์ระหว่างมุมที่รังสีเอกซ์สะท้อนออกมากับความยาวคลื่นของมัน (λ) หากใครก็ตามมองภาพของผลึกที่เกิดจากระนาบของอะตอมที่เรียงซ้อนกันอย่างมีระเบียบแบบซ้ำรอยเดิมโดยระนาบที่ชิดกันห่างกันเป็นระยะ d ภาพที่มองทางด้านข้างตามแนวขนานกับระนาบคงจะเห็นดังแสดงในรูป 4

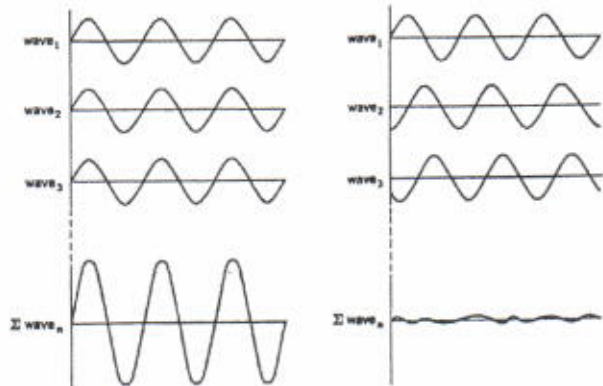
รูป 4 (Azaroff, 1968)



รูป 4 สมมติว่ามีลำรังสีเอกซ์สองลำขนานกันและมาจากแหล่งกำเนิดเดียวกัน ตกกระทบบนระนาบผลึกโดยทำมุม θ กับระนาบ ถ้าหากลำรังสีเอกซ์มีพฤติกรรมเป็นคลื่น คลื่นตกกระทบบนระนาบที่มีหน้าคลื่นเดียวกัน กล่าวคือคลื่นตกกระทบบนระนาบที่มีเฟสเดียวกัน ณ ตำแหน่งบนเส้นตรงที่ตั้งฉากกับลำรังสีเอกซ์ ความหมายของคำว่ามีเฟส

เดียวกันนั้นมีความสำคัญมาก เนื่องจากเป็นพื้นฐานของความเข้าใจเกี่ยวกับอันตรกิริยาระหว่างหมู่คลื่นด้วยกันดังแสดงไว้ในรูป 5

รูป 5 (Azaroff, 1968)



รูปซ้ายมือเป็นภาพของคลื่นสามขบวน ซึ่งเริ่มต้นด้วยทั้งสามมีหน้าคลื่นร่วมกัน นี่เป็นกรณีของการแทรกสอดแบบเสริม คลื่นทั้งสามมีเฟสเท่ากันหรือเฟสตรงกัน ผลรวมของคลื่นทั้งหมดจะให้ผลลัพธ์เป็นคลื่นใหม่ที่มีแอมพลิจูดสูงสุด โดยมีขนาดเท่ากับผลบวกของแอมพลิจูดย่อยของแต่ละคลื่นดังแสดงในรูปของ $\Sigma wave$ ในทางกลับกันบ้าง ถ้าจุดเริ่มต้นของคลื่นเหล่านั้นต่างกันดังแสดงในรูป 5 ขวามือ ผลรวมของแอมพลิจูดของคลื่น ณ ตำแหน่งต่างๆตามแนวอนให้ผลลัพธ์ซึ่งนำไปสู่การแทรกสอดแบบหักล้าง ทั้งนี้เพราะ ณ ตำแหน่งต่างๆ คลื่นบางคลื่นมีแอมพลิจูดเป็นบวก บางคลื่นมีแอมพลิจูดเป็นลบ เราสามารถพิสูจน์ได้อย่างง่ายดายว่าเมื่อมีคลื่นจำนวนมากซึ่งมีเฟสต่างกันแบบสุ่มอย่างสมบูรณ์เปรียบเทียบซึ่งกันและกันแล้วละก็ ผลรวมของคลื่นทั้งหมดจะให้ผลลัพธ์เป็นคลื่นที่มีแอมพลิจูดเกือบเป็นศูนย์ ถ้าหากรังสีเอกซ์มีพฤติกรรมเป็นคลื่น หนทางที่คลื่นสะท้อนเหล่านั้นจะแทรกสอดซึ่งกันและกัน ณ มุมสะท้อน(มุมกระเจิง)ต่าง ๆ ย่อมขึ้นอยู่กับความสัมพันธ์ระหว่างเฟสของหมู่คลื่นเหล่านั้น

พิจารณาคลื่นรังสีเอกซ์สองขบวน OE และ O'A ทำมุม θ กับหมู่ระนาบ(hkl) สมมติว่าคลื่นรังสีเอกซ์ดังกล่าวสะท้อนออกไปในแนว AP และ EP' ตามลำดับ ซึ่งทำมุม θ กับระนาบบนสุดเช่นกัน เนื่องจากเส้นทางเดินของรังสี OEP' และ O'AP มีค่าเท่ากัน รังสีดังกล่าวเดินทางมายัง PP' ด้วยเฟสเดียวกัน และอีกครั้งหนึ่งเมื่อมาถึง PP' จะมีหน้าคลื่นร่วมกัน นี่คือการเสริมกันของรังสีด้วยเฟสเดียวกันจากระนาบเดียวกัน(ข้อสังเกตการสะท้อนผ่านระนาบเพียงระนาบเดียว คลื่นสะท้อนจะมีเฟสเดียวกันเสมอไม่ขึ้นอยู่กับการหักเห) เพื่อที่จะหาเงื่อนไขการแทรกสอดของคลื่นสะท้อนจากระนาบที่ต่างกัน พิจารณารังสีตกกระทบ O'C และคลื่นสะท้อนออกมาเป็นรังสี CP'' ถ้า EB ขนานกับหน้าคลื่น OO' และเช่นเดียวกัน ED ขนานกับ PP'' เส้นทาง O'CP'' จะมีค่ามากกว่า OEP' ด้วยปริมาณ

$$\begin{aligned}\Delta &= BCD \\ &= 2BC\end{aligned}\quad (1)$$

โดยการพิจารณาสองเหลี่ยมมุมฉาก EBC ให้ผลว่า $BC = d \sin \theta$ ดังนั้นผลต่างของเส้นทางเดินของคลื่น (path difference) จากสมการ(1) เราได้

$$\Delta = 2d \sin \theta \quad (2)$$

เราสามารถแสดงได้ว่าถ้ารังสี $O'CP$ ซึ่งมีการสะท้อนจากระนาบที่ 2 แล้วเดินทางไปยังตำแหน่งบนเส้นตรง $PP'P''$ ด้วยเฟสเดียวกันกับรังสี $O'AP$ และ OEP' ซึ่งสะท้อนจากระนาบที่ 1 กล่าวคือการสะท้อนจากระนาบทั้งคู่ให้ผลเป็นคลื่นที่มีเฟสเดียวกัน ผลต่างของเส้นทางเดินของคลื่น Δ จะต้องมีความเป็นจำนวนเท่าของความยาวคลื่นคือ $n\lambda, n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ด้วยเหตุนี้เงื่อนไขสำหรับการสะท้อนด้วยเฟสตรงกันจากชุดของระนาบที่ขนานกัน ห่างกันด้วยระยะทางสม่ำเสมอ d สามารถเขียนได้เป็น

$$n\lambda = 2d \sin \theta \quad (3)$$

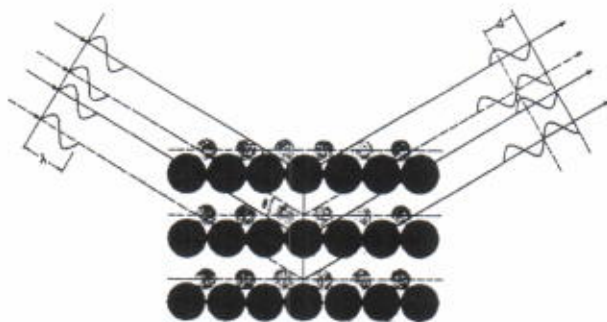
นี่คือความสัมพันธ์ที่แบร์กใช้ในการอธิบายการทดลองเรื่องการเลี้ยวเบนของเลาเอ จากมุมมองการสะท้อนรังสีเอกซ์ผ่านระนาบ ทำให้ในทางปฏิบัติอาจใช้คำว่าสะท้อนแทนการเลี้ยวเบนโดยไม่ผิดความหมาย จากสมการ(3) ในการหาค่ามุมที่สอดคล้องกับเงื่อนไขการแทรกสอดแบบเสริม ได้ผล

$$\theta = \sin^{-1} \frac{n\lambda}{2d} \quad (4)$$

จากสมการ(4) แสดงให้เห็นว่าสำหรับความยาวคลื่นค่าหนึ่ง การเลี้ยวเบนเกิดขึ้นที่มุมใด ๆ นั้นถูกกำหนดโดยระยะห่างระหว่างระนาบ d และ d เองก็ขึ้นอยู่กับโครงสร้างของผลึก กล่าวโดยสรุปโครงสร้างผลึกเป็นตัวกำหนดมุมเลี้ยวเบน

เพื่อที่จะดูว่าการจัดเรียงตัวของอะตอมในโครงผลึกนั้นมีผลอย่างไรต่อความเข้มของรังสีที่เลี้ยวเบนด้วยค่ามุมเหล่านี้ เราจำเป็นต้องทราบว่าอะตอมต่างๆ นั้นวางตัวท่ามกลางระนาบต่างๆ อย่างไร พิจารณาโครงสร้างผลึกอย่างง่ายซึ่งประกอบด้วยอะตอมสองชนิดดังตัวอย่างแสดงในรูป 6 กลุ่มอะตอมขนาดใหญ่วางตัวเป็นระนาบห่างกันเป็นระยะ d (แสดงด้วยเส้นทึบ) ในขณะที่อะตอมซึ่งมีขนาดเล็กกว่าวางตัวเป็นระนาบห่างกันเป็นระยะ d เช่นกัน(แสดงด้วยเส้นประ) หากขบวนคลื่นกระทบกระทบระนาบอะตอมขนาดใหญ่สอดคล้องสมการ (4) ระนาบเหล่านี้ย่อมให้คลื่นสะท้อนที่มีเฟสตรงกัน และเช่นเดียวกันกับคลื่นที่สะท้อนผ่านระนาบของอะตอมที่เล็กกว่า แต่

รูป 6 (Azaroff, 1968)



เนื่องจากผลต่างของเส้นทางของคลื่นที่สะท้อนผ่านระนาบต่างอะตอมกันจะมีค่าน้อยกว่า λ ($\Delta < \lambda$) ดังนั้นขบวนคลื่นสองขบวนนี้จะมีเฟสไม่ตรงกัน เกิดการแทรกสอดแบบหักล้างแต่ไม่สมบูรณ์ ดังนั้นแอมพลิจูดของคลื่นเลี้ยวเบนจะมีค่าน้อยกว่าในกรณีที่เกิดการแทรกสอดแบบเสริมอันเนื่องมาจากการเลี้ยวเบนผ่านระนาบของ

อะตอมชนิดเดียว สำหรับความเข้มของคลื่นเลี้ยวเบนจะเป็นปฏิภาคโดยตรงกับแอมพลิจูดของคลื่นยกกำลังสอง ดังนั้นอาจสรุปจากที่กล่าวมาทั้งหมดได้ว่า ความเข้มของคลื่นเลี้ยวเบนถูกกำหนดโดยรูปแบบการเรียงตัวของอะตอมจริง ๆ หรือลักษณะของโครงสร้างของผลึก

การกำหนดค่าความยาวคลื่น(Determination of X-ray Wavelength)

จากการพิจารณารูปที่ 3 แสดงให้เห็นว่าถ้ามุมซึ่งสมนัยกับความเข้มสูงสุดในหมู่ความเข้มสูงผิดปกติสองกลุ่ม(แต่ละกลุ่มมียอดแหลมสามยอด)ถูกแทนลงในสมการของแบร็กก[สมการ(3)] ความเข้มนี้ย่อมสอดคล้องกับ $n=1$ และ $n=2$ ตามลำดับ นี่เป็นตัวอย่างของการเลี้ยวเบนอันดับที่ 1 และอันดับที่ 2 โดยการหารด้วย n ตลอด ย่อมได้

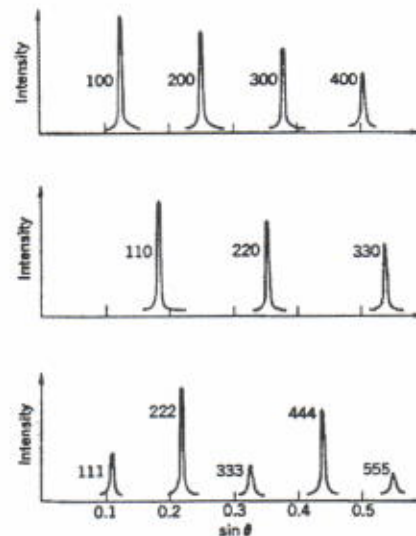
$$\lambda = 2 \frac{d}{n} \sin\theta \quad (5)$$

อัตราส่วน d/n ในสมการ(5)อาจตีความในเชิงผลึกวิทยาได้อีกแบบหนึ่งคือ d/n เป็นระยะระหว่างระนาบผลึกในจินตนาการที่ระบุด้วยชุดตัวเลข(nh , nk , nl) เนื่องจากระนาบที่ระบุด้วยชุดตัวเลขดังกล่าวมีระยะระหว่างระนาบเป็น d_{hkl}/n กล่าวคือระยะระหว่างระนาบผลึก (nh , nk , nl) จะมีระยะระหว่างระนาบผลึกเป็น $1/n$ เท่าของระนาบที่ระบุด้วยชุดตัวเลข(h, k, l) พึงระลึกไว้เสมอว่าตัวเลขซึ่งเป็นดรรชนีบ่งชี้ระนาบผลึกยิ่งมากเท่าใด ระยะห่างระหว่างระนาบชุดดังกล่าวยิ่งน้อยลงเท่านั้น สาเหตุที่เรียกระนาบ(nh , nk , nl)ว่าเป็นระนาบในจินตนาการทั้งนี้เพราะระนาบดังกล่าวไม่มีอยู่จริง(มิได้เกิดจากการเรียงตัวของอะตอมแต่อย่างใด) แต่เป็นระนาบที่สร้างขึ้นมาในเชิงคณิตศาสตร์ ดังนั้นการเลี้ยวเบนของรังสีเอกซ์ในมุมมองแบบนี้จะมีการเลี้ยวเบนอันดับที่หนึ่งอันดับเดียวเท่านั้น ไม่มีอันดับ n อีกต่อไป สมการ(5)อาจเขียนใหม่ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= 2d_{hkl} \sin\theta \\ &= 2d \sin\theta_{hkl} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ทั้งนี้เพื่อที่จะบอกว่าเป็นการสะท้อนผ่านระนาบ(hkl)ใด(ซึ่งอาจไม่ใช่ระนาบอะตอมจริงๆ)หรือ ณ ตำแหน่งมุมเฉพาะราย θ_{hkl} รูป 7 แสดงความเข้มของการเลี้ยวเบนผ่านระนาบต่างๆ สอดคล้องกับ $\sin\theta$ ต่างๆ ที่สมนัยกัน (หรืออาจมองในลักษณะสะท้อนผ่านระนาบชุดเดียวแต่เป็นอันดับต่างๆ ก็ย่อมได้)

รูป 7 แสดงความเข้มของการเลี้ยวเบนอันดับ
ต้น ๆ จำนวนหนึ่งจากระนาบ(100), (110), และ
(111)ของ NaCl อย่างไรก็ตามดังได้อภิปราย
ในตอนท้าย ดร.รณนิตที่ระนาบ 100 และ
110 นั้นยังไม่ถูกต้อง (Azaroff, 1968)



เมื่อครั้งที่แบร์ริกใช้สเปกโตรมิเตอร์วัดสเปกตรัมของรังสีเอกซ์ที่สะท้อนผ่านผลึกเดี่ยว(single crystal)เป็น
ครั้งแรกนั้น เขาไม่ทราบขนาดของทั้ง d และ λ เพื่อที่จะเอาชนะปัญหาที่ยากเขื่อนี้ แบร์ริกผู้ลูกก็ได้เตรียมผลึก
เกลือแกง(NaCl)จำนวนสามผลึกพร้อมทั้งตัดผิวผลึกขนานกับระนาบสามระนาบคือ(100), (110), และ(111)ทั้งนี้
เพื่อให้สามารถจัดการให้รังสีเอกซ์สะท้อนผ่านระนาบทั้งสามได้โดยง่าย สำหรับความเข้มของรังสีเอกซ์สมนัยกับ
 $\sin \theta$ ต่างๆ ได้แสดงไว้ในรูป 7 สังเกตว่าหนึ่งในสามของรูป 7(รูปล่าง) มีรูปที่ผิดแผกออกไป กล่าวคือกราฟ
แสดงลักษณะความเข้มต่ำ-สูงสลับกันไป ลักษณะดังกล่าวส่อให้เห็นว่าระนาบ(111)นั้นมีระนาบอะตอมต่างชนิด
ขนานกันโดยสลับกันไป(กล่าวคือมีระนาบอะตอมของ Na สลับกับระนาบของอะตอม Cl)

รูป 8 แสดงผลึกเกลือแกง
(Azaroff, 1968)



อันที่จริงแบบจำลองโครงสร้างผลึก NaCl เคยถูกเสนอมาก่อนแล้วโดยบาร์โลว์(W.L. Barlow) ดังแสดงในรูป 8
แต่ทว่ายังไม่ทราบขนาดของระยะต่างๆ อย่างแน่ชัด ศาสตราจารย์โปป(Prof. Pope)แห่งมหาวิทยาลัยเคมบริดจ์
จึงแนะนำให้แบร์ริกทดสอบทฤษฎีการเลี้ยวเบนของพวกเขาจากการทดลอง โดยอาศัยข้อมูลจากกราฟในรูป 7 แบร์ริก

แทน $\sin\theta$ สำหรับการเลี้ยวเบนจากระนาบ(100), (110), และ(111)ตามลำดับลงไปในการเริ่มแรกของเขา
ได้ผลดังนี้

$$\left. \begin{aligned} n_1 \lambda &= 2d_{100} (0.126) \\ n_2 \lambda &= 2d_{110} (0.178) \\ n_3 \lambda &= 2d_{111} (0.109) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

และจากความรู้เกี่ยวกับโครงสร้างเชิงเรขาคณิตของผลึกลูกบาศก์ ทำให้ได้ความสัมพันธ์ $d_{100} = \sqrt{2}d_{110}$, $d_{110} = \sqrt{3}d_{111}$, และ $d_{111} = \sqrt{3/2}d_{110}$ ด้วยการสร้างอัตราส่วนจากความสัมพันธ์เหล่านี้ สามารถกำจัด λ ได้ ส่งผลให้

$$\begin{aligned} \frac{d_{100}}{d_{110}} &= \left(\frac{0.178}{0.126} \right) \frac{n_1}{n_2} = \sqrt{2} \\ \frac{d_{100}}{d_{111}} &= \left(\frac{0.109}{0.126} \right) \frac{n_1}{n_3} = \sqrt{3} \\ \frac{d_{110}}{d_{111}} &= \left(\frac{0.109}{0.178} \right) \frac{n_2}{n_3} = \sqrt{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

จากการตรวจสอบสมการทั้งสาม สมการจะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อ $n_1=2$, $n_2=2$, และ $n_3=1$ เท่านั้น ผลการคำนวณ
บ่งชี้ว่า เลขตรรกษณีระนาบต้องเป็นเลขคู่ทั้งหมด อาทิ (200) และ (220) หรือไม่ก็ต้องเป็นเลขคี่ทั้งหมด เช่น
(111) ดังนั้นในรูปที่หนึ่งและรูปที่สองของรูป 7 ทุกตำแหน่งที่ความเข้มสูงเป็นพิเศษตรรกษณีต้องเปลี่ยนเป็นสอง
เท่าทุกตรรกษณี ผลจากการตรวจสอบรูป 7 แสดงให้เห็นว่า แท้จริงแล้วเกลือแกง NaCl นั้นมีโครงสร้างเป็นแบบ
face-centered cubic lattice ที่ประกอบไปด้วยอะตอม Na และ Cl อย่างละหนึ่งอะตอมต่อหนึ่งจุดแลตทิซ นี่
เป็นตัวอย่างอันหนึ่งที่แบร์ริกสามารถอนุมานโครงสร้างผลึกได้เป็นคนแรกๆ ของโลก เป็นการมีส่วนร่วมที่ส่งผล
กระทบต่อพัฒนาการของฟิสิกส์แผนใหม่ (modern physics) อย่างใหญ่หลวง

เมื่อสามารถหาโครงสร้างของผลึก NaCl ได้แล้ว การกำหนดขนาดของปริมาตรเซลล์หน่วย $V=a^3=(2d_{200})^3$
และความยาวคลื่นของรังสีเอกซ์ที่ใช้ก็สามารถทำได้ง่ายขึ้นทั้งนี้โดยอาศัยข้อมูลความหนาแน่นของ NaCl ซึ่ง
เป็นที่ทราบกันดีอยู่แล้ว และอาศัยความสัมพันธ์ที่ได้จากสมการ (7) ผลปรากฏเป็นไปตามคาด ความยาวคลื่น
ของรังสีเอกซ์มีขนาดอยู่ในระดับ 10^{-8} cm ดังนั้นจะเป็นการสะดวกยิ่งขึ้นที่จะบัญญัติหน่วยวัดสเกลใหม่ขึ้นมาเพื่อ
การนี้โดยเฉพาะ หน่วยใหม่นี้มีชื่อว่า “อังสตรอม”(Å) โดยที่ $1\text{Å}=10^{-8}$ cm เพื่อที่จะตั้งหน่วยใหม่นี้
ลงบนสเกลมาตรฐาน แบร์ริกเสนอด้านของเซลล์หน่วยของผลึก NaCl เป็นมาตรฐานโดย $a=5.628 \text{ Å}$ มาตรฐาน
ที่ได้นี้สามารถนำไปสู่การวัดความยาวคลื่นของรังสีเอกซ์ลักษณะเฉพาะ(Characteristic x ray)ที่เปล่งจากเป้า
โลหะชนิดต่างๆ ได้ ปีค.ศ.1930 มีความเป็นไปได้ที่จะวัดความยาวคลื่นของรังสีเอกซ์โดยอาศัย ruled gratings และ
ในไม่ช้าเป็นที่ประจักษ์ว่าการวัดความยาวคลื่นทั้งสองวิธีให้ผลใกล้เคียงกันมาก กล่าวคือแตกต่างกันราว 0.2% เท่านั้น

เอกสารอ้างอิง

Azaroff, Leonid V., *Elements of X-ray Crystallography*, McGraw-Hill Book Company,
New York,1968.

Tipler, Paul A., *Elementary Modern Physics*, Worth Publishers, New York, NY 1003, 1996.