

Maple : การประยุกต์ใช้ในเมทริกซ์ Maple : Application to Matrix

ประสพชัย พสุนนท์*

1. ความนำ

“อย่าเกลียดคณิตศาสตร์ เพราะคณิตศาสตร์ คือ ชีวิต” คำกล่าวของ พ.ต.ท.ทักษิณ ชินวัตร นายกรัฐมนตรี ในโอกาสที่สอนนักเรียนชั้น ม. 5/5 โรงเรียนสามเสนวิทยาลัย แสดงถึงความสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์ที่เป็นรากฐานสำหรับพัฒนาองค์ความรู้ในระดับสูงต่อไป แต่จากการประเมินคุณภาพการศึกษาของนักเรียนจากสำนักทดสอบทางการศึกษา กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ พบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนในทุกระดับอยู่ในเกณฑ์ค่อนข้างต่ำ และพบว่าการสอนคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่ไม่เปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ปฏิบัติจริง เพียงแต่ผู้สอนนำเสนอและให้ทำแบบฝึกหัดในบทเรียนเท่านั้น ซึ่งขัดกับแนวการสอนที่ให้ความสำคัญกับผู้เรียน

ลักษณะประการหนึ่งของวิชาคณิตศาสตร์ คือ ความเป็นนามธรรม ซึ่งมักใช้สัญลักษณ์ในการอธิบาย ผู้เรียนที่ไม่คุ้นเคยจะรู้สึกไม่อยากเรียนและมีเจตคติที่ไม่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ ปัจจุบันเทคโนโลยีทางด้านคอมพิวเตอร์ก้าวหน้าในหลายแขนงวิชา มีการพัฒนาโปรแกรมสำเร็จรูปเพื่อใช้ในงานด้านต่างๆ รวมถึงโปรแกรมสำเร็จรูปทางด้านคณิตศาสตร์ ซึ่งนอกจากจะใช้ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่มีความยากสลับซับซ้อนได้แล้วยังสามารถนำเสนอในรูปแบบต่างๆ ที่ง่ายต่อการทำความเข้าใจด้วย โปรแกรมสำเร็จรูปที่สามารถประยุกต์ใช้ในด้านคณิตศาสตร์มีให้เลือกหลากหลายขึ้นอยู่กับลักษณะการใช้งาน

Maple เป็นโปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ที่มีประสิทธิภาพโปรแกรมหนึ่ง ซึ่งมีลักษณะการใช้งานในเชิง Symbolic Computation System หรือ Computer Algebra System มีความสามารถในการคำนวณข้อมูลในรูปสัญลักษณ์หรือข้อความทางคณิตศาสตร์ Maple พัฒนาโปรแกรมให้สอดคล้องกับหลายเนื้อหา อาทิ Geometry , Calculus , Matrix , Differential Equations , Vector , Complex Analysis , Statistics เป็นต้น ในบทความนี้จะกล่าวถึง Maple สำหรับการประยุกต์ใช้ในเรื่องเมทริกซ์

* อาจารย์ประจำโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์และสถิติประยุกต์ สถาบันราชภัฏนครปฐม

เมื่อเริ่มเปิดโปรแกรมจะปรากฏ worksheet ดังรูปที่ 1 จะมีเครื่องหมาย prompt เป็น > ซึ่งพร้อมจะรับข้อมูล ซึ่งสามารถพิมพ์ข้อมูลที่เป็นการคำนวณได้ตั้งแต่ การบวก (+) ลบ (-) คูณ (*)หาร (/) ยกกำลัง (^ หรือ **) เรื่อยไปจนถึงการคำนวณขั้นสูง รูปแบบ Maple เป็นรูปแบบที่พิมพ์คำสั่งต่อไปเรื่อยในบรรทัดเดียวเมื่อจบประโยคแล้วต้องตามด้วยเครื่องหมาย ; และกด <Enter> เช่น

12

%%% แทนผลลัพธ์ก่อนร้องสุดท้าย



รูปแบบการกำหนดชื่อใน Maple อักษรตัวใหญ่ ตัวเล็ก ถือว่าเป็นคนละชื่อ เช่น A และ a ถือเป็นคนละชื่อ การกำหนดชื่อให้กับข้อความหรือจำนวน มีรูปแบบ คือ ชื่อ:=ข้อความ(หรือจำนวน) เช่น

> d:=4;

d:=4;

และโดยปกติ Maple จะแสดงผลลัพธ์เป็น 10 ตัวเลขโดด หากต้องการให้แสดงผลลัพธ์ให้มีจำนวนเลขโดดตามต้องการสามารถระบุได้ เช่น

> evalf(7/9,20);

0.77777777777777777778

หรือหากต้องการให้ผลลัพธ์ต่อไปนี้ทุกตัวแสดงผลลัพธ์เป็น 40 เลขโดด ให้ใช้คำสั่ง

> Digits:=40;

นอกจากนี้ Maple ได้กำหนดค่าคงที่ตามหลักคณิตศาสตร์ไว้แล้ว เช่น ค่า i (เท่ากับ $\sqrt{-1}$) , ค่า π เป็นต้น และเรียกใช้ได้โดยการพิมพ์ I และ Pi ตามลำดับ ต่อไปจะกล่าวถึงคำสั่งเบื้องต้นที่ใช้ใน Maple ดังนี้

1. คำสั่ง **expand** ใช้กระจายข้อความ เช่น

> expand((y-2)^2);

$y^2 - 4y + 4$

2. คำสั่ง **factor** ใช้แยกตัวประกอบ เช่น

> factor(x^3 - 8);

$(x-2)(x^2+2x+4)$

3. คำนวนแฟกทอเรียล (factorial) ของจำนวนเต็ม เช่น

> 18!;

6402373705728000

4. คำสั่ง **ifactor** ใช้แยกตัวประกอบของจำนวนเต็ม เช่น

> ifactor(140);

$(2)^2 (5) (7)$

5. คำสั่ง **isprime** ใช้ตรวจสอบจำนวนเฉพาะ เช่น

> isprime(47);

true

6. คำสั่ง **solve** ใช้ในการแก้สมการ เช่น

> solve($\{x^2 = 64\}, \{x\}$);

$$\{x=8\}, \{x=-8\}$$

7. คำสั่ง **subs** ใช้ในการแทนค่า เช่น ต้องการแทน $y = a - b$ ใน $y^4 - y^2 + 124$ ทำได้โดย

> subs($\{y = a-b\}, y^4+y^2+124$);

$$(a-b)^4+(a-b)^2+124$$

8. คำสั่ง **diff** ใช้ในการอนุพันธ์ เช่น อนุพันธ์ x^2 เทียบกับ x ทำได้โดย

> diff(x^2, x);

$$2x$$

9. คำสั่ง **int** ใช้ในการอินทิเกรต เช่น อินทิเกรต x^2 เทียบกับ x ทำได้โดย

> int(x^2, x);

$$\frac{x^3}{3}$$

10. คำสั่ง **ln** ใช้ในการคำนวณค่าลอการิทึมธรรมชาติ (natural logarithm) เช่น

> ln(1);

$$0$$

11. คำสั่ง **sqrt** ใช้ในการคำนวณค่ารากที่สอง เช่น คำนวณรากที่สองของ 81 ทำได้โดย

> sqrt(81);

$$9$$

และถ้าต้องการคำนวณรากค่าอื่น ๆ คำสั่งที่ใช้ คือ **root** เช่น คำนวณรากที่สามของ 27 ทำได้โดย

> root[3](27);

$$3$$

หรือคำนวณรากที่สี่ของ 16 ทำได้โดย

> root(16,4);

$$2$$

12. คำสั่ง **restart** ใช้เมื่อต้องการเริ่มต้นใหม่ เพื่อให้ Maple ลืมความจำก่อนหน้านี้ กล่าวคือ ตัวแปร ข้อความ ตลอดจนคำสั่งที่กำหนดขึ้นก่อนหน้านี้จะถูกลืมหหมด

ทั้ง 12 คำสั่งที่กล่าวมา เป็นเพียงส่วนหนึ่งในการทำควมรู้จักกับ Maple แท้จริงแล้วยังมีอีกหลายคำสั่งที่น่าสนใจ โดยเฉพาะที่เกี่ยวข้องกราฟซึ่งจะได้นำเสนอในโอกาสต่อไป

3. Maple สำหรับการประยุกต์ใช้ในเมทริกซ์

ออปเจก (object) ใน Maple มี 6 แบบ คือ expression sequences , lists , sets , arrays , tables และ strings บทความนี้ จะกล่าวเฉพาะ array ซึ่งเป็นลักษณะข้อมูลของเมทริกซ์

เมทริกซ์ (matrix) คือ การจัดเรียงจำนวน (หรือข้อมูล) ในรูปของแถว (row) และหลัก (column) ในเครื่องหมาย [] หรือ () โดยส่วนใหญ่ การเขียนเมทริกซ์นิยมเขียนแทนด้วยอักษรอังกฤษตัวใหญ่ เช่น A , M , U , Y , CM , RM เป็นต้น และหากต้องการแทนเมทริกซ์ใดๆ จะแทนสมาชิกด้วยอักษรอังกฤษตัวเล็ก เช่น $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ หรือ $M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ เป็นต้น การอธิบายในบทความจะใช้เมทริกซ์ที่เป็นสัญลักษณ์ในการนำเสนอและจะยกตัวอย่างบ้างตามสมควร

การใช้โปรแกรมสำเร็จรูป Maple ที่เกี่ยวข้องกับเมทริกซ์ต้องเรียก package ในโปรแกรมก่อนที่จะใช้คำสั่งวิธีการเรียก package คือ > with(linalg): หมายความว่า **linalg** เป็น package ที่ใช้ดำเนินการ คำนวณ และแสดงค่าในส่วนที่เป็นเมทริกซ์

3.1 การสร้างเมทริกซ์

พิจารณาเมทริกซ์ที่มีมิติ 2x3 จะมีวิธีสร้างเมทริกซ์ได้ดังนี้

วิธีที่ 1 คลิก View Menu แล้วเลือก Palettes จากนั้นคลิกที่ Matrix Palette ดังรูปที่ 2 และจะปรากฏหน้าต่าง ดังรูปที่ 3 ใส่ค่าตามมิติที่ต้องการ ดังนี้

```
> <<a[11]|a[12]|a[13]> , <a[21]|a[22]|a[23]>>;
```

หากต้องการปิดหน้าต่างให้คลิก (-) ในรูปที่ 3 ข้อเสียของวิธีการนี้ คือ สามารถเลือกสร้างเมทริกซ์ได้สูงสุดเพียงมิติ 4x4

วิธีที่ 2 ใช้คำสั่ง **matrix** ดังนี้

แบบที่ 1 > A:=matrix([[a[11],a[12],a[13]] , [a[21],a[22],a[23]]]);

แบบที่ 2 > A:=matrix(2,3,[a[11],a[12],a[13],a[21],a[22],a[23]]);

วิธีที่ 3 ใช้คำสั่ง **array** ดังนี้

แบบที่ 1 > A:=array([[a[11],a[12],a[13]], [a[21],a[22],a[23]]]);

แบบที่ 2 > A:=array(1..2,1..3,[[a[11],a[12],a[13]], [a[21],a[22],a[23]]]);

วิธีที่ 4 ใช้คำสั่ง **convert** ดังนี้

```
> A:=convert([ [a[11],a[12],a[13]], [a[21],a[22],a[23]] ],matrix);
```

ทั้ง 4 วิธีดังกล่าวให้ผลลัพธ์เหมือนกัน คือ $A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ ตัวอย่างในการสร้างเมทริกซ์ แสดงดังนี้

> A:=array(1..2,1..3,[[3,-2,5],[0,-4,-1]]);

$$A := \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

ในกรณีที่ต้องการแทนค่าในเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นสัญลักษณ์อาจทำได้ดังนี้

> V:=matrix(3,3,[v[11],v[12],v[13], v[21],v[22],v[23], v[31],v[32], v[33]]);

$$V := \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix}$$

> V := subs(v[11]=8, v[12]=2, v[13]=1, v[21]=1, v[22]=3, v[23]=0, v[31]=4, v[32]=2, v[33]=1, matrix(V));

$$V := \begin{bmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

หรือหากต้องการแทนค่าที่ละค่าก็ย่อมทำได้ด้วยคำสั่ง **entermatrix** ตามขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 > F := matrix(2,2, [f[11],f[12],f[21],f[22]]): F = matrix(F);

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$$

ขั้นที่ 2 > F := entermatrix(F) :

enter element 1,1 > -2;

enter element 1,2 > 3;

enter element 2,1 > 4;

enter element 2,2 > 6;

ขั้นที่ 3 > F = matrix(F) ;

$$F := \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

แต่หากเป็นกรณีที่เมทริกซ์มีสมาชิกเป็นฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ เช่น

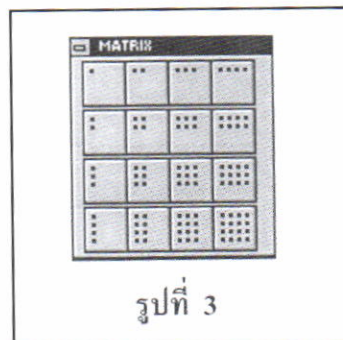
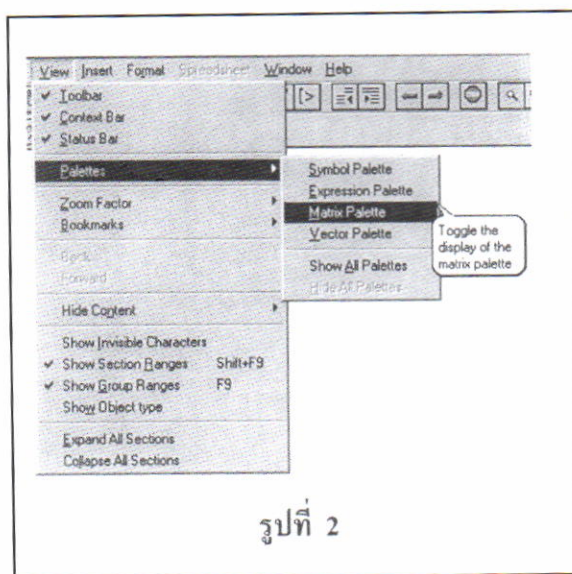
```
> E := matrix(2, 3, [(3*a-2*b)^2, 1/4*exp(b/a), -2*tan(2*a/(a^2+b^2)), 2*cos(a/b),  
4/7*sinh(2*a^2+b), 3/5*a^(-sin(b))]) : E = matrix(E) ;
```

$$E = \begin{bmatrix} (3a - 2b)^2 & \frac{1}{4} e^{\left(\frac{b}{a}\right)} & -2 \tan \left(2 \frac{a}{a^2 + b^2} \right) \\ 2 \cos \left(\frac{a}{b} \right) & \frac{4}{7} \sinh(2a^2 + b) & \frac{3}{5} a^{(-\sin(b))} \end{bmatrix}$$

และต้องการแทน $a = 1.75$ และ $b = -0.25$ ในฟังก์ชันของเมทริกซ์สามารถทำได้โดยใช้คำสั่ง **map** และ operator $x \rightarrow$ ร่วมกับคำสั่ง **eval** ดังนี้

```
> a := 1.75; b := -0.25;  
> E = map(x->eval(x), E) ;
```

$$E = \begin{bmatrix} 33.0625 & 0.2167194749 & -4.131910522 \\ 1.507804509 & 101.7205291 & 0.6890961540 \end{bmatrix}$$



3.2 รูปแบบต่าง ๆ ของเมทริกซ์

3.2.1 เมทริกซ์ศูนย์

การสร้างเมทริกซ์ศูนย์ (zero matrix) มิติ 2x4 ทำได้ดังนี้

```
> matrix(2,4,0);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

หากต้องการสร้างเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นทุกตัวเดียวกัน ก็สามารถทำได้ เช่น

```
> S:=matrix(1,6,8);
```

$$S := [8 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \quad 8]$$

```
> SS:=matrix(2,7,-5);
```

$$SS := \begin{bmatrix} -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

3.2.2 เมทริกซ์ทแยงมุม

ในการสร้างเมทริกซ์ทแยงมุม (diagonal matrix) นั้นมีคำสั่งโดยเฉพาะ คือ **diag** เช่น

```
> A:=diag(1,5,7,9);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

สำหรับเมทริกซ์เชิงสเกลาร์ (scalar matrix) ก็ทำได้ในทำนองเดียวกัน เช่น

```
> A:=diag(5,5,5,5);
```

3.2.3 เมทริกซ์เอกลักษณ์

เมทริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix) มิติ 3x3 จะวิธีการสร้างดังนี้

วิธีที่ 1 ใช้คำสั่ง **diag** ดังนี้

```
> diag(1,1,1);
```

วิธีที่ 2 ใช้คำสั่ง **identity** ภายในคำสั่ง **array** ดังนี้

```
> array(1..3,1..3,identity);
```


จากวิธีทั้งสอง จะได้ผลลัพธ์ คือ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2.4 เมทริกซ์สลับเปลี่ยน

คำสั่งที่ใช้ในการสร้างเมทริกซ์สลับเปลี่ยน (transpose of a matrix) คือ **transpose** เช่น

> C:=matrix(2,3,[[-8,0,1],[2,7,-9]]);

$$C := \begin{bmatrix} -8 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & -9 \end{bmatrix}$$

> transpose(C);

$$\begin{bmatrix} -8 & 2 \\ 0 & 7 \\ 1 & -9 \end{bmatrix}$$

3.2.5 เมทริกซ์ผกผัน

ในการคำนวณเมทริกซ์ผกผัน (adjoint matrix) จากเมทริกซ์จัตุรัสมีวิธีดังนี้

พิจารณา > A:=matrix(2,2,[1,2,3,4]);

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

วิธีที่ 1 ใช้คำสั่ง **adjoint** ดังนี้

> adjoint(A);

วิธีที่ 2 ใช้คำสั่ง **adj** ดังนี้

> adj(A);

ซึ่งหลังจากใช้คำสั่งทั้ง 2 วิธีจะได้ผลลัพธ์ คือ $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ และจะพบว่า $A \cdot \text{adj}(A)$ จะได้ผลดังนี้

> evalm(matrix(A)&*adj(A));

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

3.2.6 เมทริกซ์สมมาตร

การสร้างเมทริกซ์สมมาตร (symmetric matrix) ทำได้โดยใช้คำสั่ง **symmetric** ภายใต้คำสั่ง **array** ดังนี้

> A := array(symmetric,1..3,1..3,[(1,1)=5,(2,2)=2,(3,3)=7,(1,2)=1,(1,3)=3,(2,3)=-2]);

$$A := \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

นำเมทริกซ์ A ยกกำลัง -3 จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

> evalm(A^(-3));

$$\begin{bmatrix} \frac{13334}{2197} & \frac{-1798}{169} & \frac{-12989}{2179} \\ \frac{-1798}{169} & \frac{243}{13} & \frac{1753}{169} \\ \frac{-12989}{2179} & \frac{1753}{169} & \frac{12661}{2197} \end{bmatrix}$$

3.2.7 เมทริกซ์เสมือนสมมาตร

คำสั่งที่ใช้ในการสร้างเมทริกซ์เสมือนสมมาตร (skew - symmetric matrix) คือ **antisymmetric** ภายใต้คำสั่ง **array** ดังนี้

> A:=array(antisymmetric,1..3,1..3,[(1,2)=1,(1,3)=5,(2,3)=-3]);

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

นำเมทริกซ์ A ยกกำลัง 3 จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

> evalm(A^3);

$$\begin{bmatrix} 0 & -35 & -175 \\ 35 & 0 & 105 \\ 175 & -105 & 0 \end{bmatrix}$$

3.3 การบวกของเมทริกซ์

สมมติ A และ B เป็นเมทริกซ์ที่สามารถบวกกันได้ การบวกของเมทริกซ์ (matrix addition) จะมีวิธีการดังนี้

วิธีที่ 1 ใช้คำสั่ง **matadd** ดังนี้

> matadd(A,B);

วิธีที่ 2 ใช้คำสั่ง **evalm** ดังนี้

> evalm(A+B);

ในการทำงานเดียวกัน การลบของเมทริกซ์ (subtraction matrix) หากต้องการลบเมทริกซ์ 2 เมทริกซ์ เช่น $A - B$ ทำได้ดังนี้ `> matadd(A,-B);` หรือ `> evalm(A-B);`

3.4 การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์

การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์ (scalar multiplication) ให้ A เป็นเมทริกซ์ใดๆ และ k เป็นค่าคงที่ใดๆ การคำนวณ kA มีวิธีดังนี้

วิธีที่ 1 ใช้คำสั่ง **scalarmul** ดังนี้

```
> scalarmul(A,k);
```

วิธีที่ 2 ใช้คำสั่ง **evalm** ดังนี้

```
> evalm(k*A);
```

วิธีที่ 3 ใช้คำสั่ง **map** ร่วมกับ operator $x \rightarrow$ ดังนี้

```
> map(x->x*k,A);
```

3.5 การคูณของเมทริกซ์

สมมติ A และ B เป็นเมทริกซ์ที่คูณกันได้ การคูณของเมทริกซ์ (matrix multiplication) จะมีวิธีการดังนี้

วิธีที่ 1 ใช้คำสั่ง **multiply** ดังนี้

```
> multiply(A,B);
```

วิธีที่ 2 ใช้คำสั่ง **evalm** ร่วมกับ operator $*$ ดังนี้

```
> evalm(A&*B);
```

3.6 ผลบวกเฉียงของเมทริกซ์

การคำนวณผลบวกเฉียงของเมทริกซ์ (trace of matrix) จัดทำได้ด้วยคำสั่ง **trace** ดังนี้

```
> A:=matrix(3,3,[a[11],a[12],a[13],a[21],a[22],a[23],a[31],a[32],a[33]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

```
> trace(A);
```

$$a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

3.7 ดีเทอร์มิแนน

คำสั่งที่ใช้คำนวณดีเทอร์มิแนน (determinant) ของเมทริกซ์ คือ **det** พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

```
> A:=matrix(2,2,[a[11],a[12],a[21],a[22]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

> det(A);

$$a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

> kA:=scalarmul(A,k);

$$kA := \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{bmatrix}$$

> det(kA);

$$k^2 a_{11} a_{22} - k^2 a_{12} a_{21}$$

> det(A)-det(transpose(A));

$$0$$

> B:=matrix(3,3,[b[11],b[12],b[13],b[21],b[22],b[23],b[31],b[32],b[33]]);

$$B := \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

> det(B);

$$b_{11} b_{22} b_{33} - b_{11} b_{23} b_{32} - b_{12} b_{21} b_{33} + b_{12} b_{23} b_{31} + b_{13} b_{21} b_{32} - b_{13} b_{22} b_{31}$$

> C:= matrix(3,3, [7,18,8,1,5,7,3,9,4]);

$$A := \begin{bmatrix} 7 & 18 & 8 \\ 1 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

> det(C);

$$-43$$

3.8 เมทริกซ์ผกผัน

กำหนด A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (non-singular matrix) ใดๆ เราสามารถคำนวณเมทริกซ์ผกผัน (inverse matrix) ตามวิธีการดังนี้

วิธีที่ 1 ใช้คำสั่ง **adj** และ **det** ในคำสั่ง **evalm** ดังนี้

```
> evalm(adj(A)/det(A));
```

วิธีที่ 2 ใช้คำสั่ง **inverse** ดังนี้

```
> inverse(A);
```

วิธีที่ 3 ใช้คำสั่ง **evalm** ร่วมกับการยกกำลัง -1 ดังนี้

```
> evalm(A^(-1));
```

3.9 ไมเนอร์

พิจารณาเมทริกซ์มิติ 3×3 ในการหาไมเนอร์ (minor) ของเมทริกซ์

```
> A:=matrix(3,3,[a[11],a[12],a[13],a[21],a[22],a[23],a[31],a[32],a[33]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ไมเนอร์ M_{12} ของเมทริกซ์มีวิธีการหาดังนี้

วิธีที่ 1 ใช้คำสั่ง **delrows** และ **delcols** ดังนี้

```
> M[12]:=delcols(delrows(A,1..1),2..2);
```

วิธีที่ 2 ใช้คำสั่ง **minor** ดังนี้

```
> M[12]:=minor(A,1,2);
```

ซึ่งหลังจากใช้คำสั่งทั้ง 2 วิธีจะได้ผลลัพธ์ คือ

$$M_{12} := \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

4. การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐาน

คำสั่งในการดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐาน (elementary row - operation) จะมีคำสั่งทั้งหมด 3 คำสั่ง คือ **addrow**, **mulrow** และ **swaprow** มีรายละเอียดดังนี้

4.1 คำสั่ง **addrow**

รูปแบบ **addrow**(M,r1,r2,c);

เมื่อ M เป็นเมทริกซ์ใดๆ

r1 และ r2 เป็นแถวที่ 1 และ 2 ของเมทริกซ์ M ตามลำดับ

c เป็นค่าคงที่ใดๆ

ความหมาย คือ นำ c ไปคูณกับ r_1 แล้วผลคูณที่ได้นำไปบวกกับ r_2 ผลลัพธ์สุดท้ายจะถูกแทนไว้ที่ r_2 สัญลักษณ์ของการดำเนินการ คือ $cxr_1 + r_2 \rightarrow r_2$

ตัวอย่าง เช่น

> M:=matrix(3,3,[1,5,11,8,0,2,4,6,7]);

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 5 & 11 \\ 8 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

(เมทริกซ์ M จะใช้เป็นตัวอย่างใน 4.2 และ 4.3 ด้วย)

> addrow(M,1,2,-8);

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 11 \\ 0 & -40 & -86 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ นำ -8 ไปคูณแถวที่ 1 ของเมทริกซ์ M จากนั้นนำไปบวกกับแถวที่ 2 และผลลัพธ์เก็บที่แถวที่ 2

4.2 คำสั่ง mulrow

รูปแบบ mulrow(M,r1,c);

เมื่อ M เป็นเมทริกซ์ใดๆ

r_1 เป็นแถวที่ 1 ของเมทริกซ์ M

c เป็นค่าคงที่ใดๆ

ความหมาย คือ นำ c ไปคูณกับ r_1 แล้วผลคูณที่ได้แทนลงไปที่ r_1 สัญลักษณ์ของการดำเนินการ คือ $cxr_1 \rightarrow r_1$

ตัวอย่าง เช่น

> mulrow(M,2,1/2);

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 11 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ แถวที่ 2 ของเมทริกซ์ M ถูกคูณด้วย $\frac{1}{2}$

4.3 คำสั่ง swaprow

รูปแบบ swaprow(M,r1,r2);

เมื่อ M เป็นเมทริกซ์ใดๆ

r_1 และ r_2 เป็นแถวที่ 1 และ 2 ของเมทริกซ์ M ตามลำดับ

ความหมาย คือ สลับแถวระหว่าง r_1 และ r_2 สัญลักษณ์ของการดำเนินการ คือ $r_1 \leftrightarrow r_2$

ตัวอย่าง เช่น

> swaprow(M,1,2);

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 11 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่าเมทริกซ์ M ถูกสลับแถวกันระหว่างแถวที่ 1 และแถวที่ 2

5. การประยุกต์เมทริกซ์ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้น

การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยเมทริกซ์ ในบทความจะเสนอ 3 วิธี โดยใช้ตัวอย่างดังนี้

จงหา x, y และ z จากระบบสมการ

$$3x - y + z = 1$$

$$4x + y + 2z = 2$$

$$x + 11y - 2z = -1$$

วิธีที่ 1 วิธีการ Gauss - Jordan โดยอาจใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐาน ตามคำสั่งดังนี้

> A:=matrix(3,4,[3,-1,1,1,4,1,2,2,1,11,-2,-1]);

$$A := \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 11 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

> A1:=addrow(A,1,2,1);

> A2:=addrow(A1,1,3,11);

> A3:=addrow(A2,2,3,-3);

> A4:=mulrow(A3,3,1/13);

> A5:=addrow(A4,3,2,-7);

> A6:=mulrow(A5,2,1/3);

> A7:=addrow(A6,3,1,-3);

> A8:=addrow(A7,2,1,-1);

> A9:=mulrow(A8,1,-1);

> A10:=swaprow(A9,1,2);

> A11:=swaprow(A10,1,3);

$$AII := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{13} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{39} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{32}{39} \end{bmatrix}$$

นั่นคือ คำตอบของระบบสมการ คือ $x = \frac{1}{13}$, $y = \frac{2}{39}$ และ $z = \frac{32}{39}$

วิธี Gauss - Jordan ขึ้นอยู่กับความชำนาญของแต่ละบุคคล วิธีการดำเนินการข้างต้นเป็นเพียงแนวทางหนึ่งเท่านั้น

วิธีที่ 2 ใช้อินเวอร์สของเมทริกซ์ ดังนี้

> B:=matrix([[3,-1,1],[4,1,2],[1,11,-2]]);

$$B := \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 11 & -2 \end{bmatrix}$$

> C:=vector([1,2,-1]);

$$C := [1, 2, -1]$$

> B1:=inverse(B);

$$B1 := \begin{bmatrix} \frac{8}{13} & \frac{-3}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{-10}{39} & \frac{7}{39} & \frac{2}{39} \\ \frac{-43}{39} & \frac{34}{39} & \frac{-7}{39} \end{bmatrix}$$

> multiply(B1,C);

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{2}{39} & \frac{32}{39} \end{bmatrix}$$

วิธีที่ 3 ใช้คำสั่ง **linsolve** ดังนี้

(จากเมทริกซ์ B และ C ในวิธีที่ 2)

> linsolve(B,C);

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{2}{39} & \frac{32}{39} \end{bmatrix}$$

6. สรุป

“ศตวรรษที่ 19 และ 20 วิทยาศาสตร์กลายเป็นอาณาจักรทางคณิตศาสตร์ และกลไกเทคนิคซับซ้อน” คำกล่าวของ Stephen Hawking นักฟิสิกส์ผู้ปราดเปรื่องที่สุดในยุคนี้ (Stephen Hawking แห่งภาควิชาฟิสิกส์ และคณิตศาสตร์ประยุกต์ และดำรงตำแหน่ง Lucasian Professor of Mathematics ที่มหาวิทยาลัยเคมบริดจ์ ถือเป็นบุคคลที่สองที่ดำรงตำแหน่งนี้ หลังจาก Sir Isaac Newton) แสดงถึงความสำคัญของคณิตศาสตร์ในศตวรรษ 21

บทบาทการเรียนการสอนคณิตศาสตร์สมัยใหม่ควรสร้างแรงจูงใจให้กับผู้เรียน ให้ผู้เรียนอยากที่จะเรียน และมีเจตคติที่ดีต่อการเรียนรู้ บทความนี้ผู้เขียนเลือกที่เขียนเกี่ยวกับ Maple เพราะ Maple เป็นโปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ที่ง่ายต่อการทำความเข้าใจ มีใช้กันอย่างแพร่หลายทั้งในระดับมัธยมศึกษาและอุดมศึกษา และเหตุที่เจาะจงเป็นเรื่องในส่วนเมทริกซ์ ก็เนื่องจากเมทริกซ์ถูกนำไปประยุกต์ใช้หรือกลายเป็นส่วนหนึ่งในหลายสาขา อาทิ เศรษฐศาสตร์, อุตสาหกรรม, วิศวกรรม, การแพทย์ เป็นต้น ดังนั้น จึงเป็นเรื่องที่น่าสนใจ หากจะให้ความสนใจทางเทคโนโลยีคอมพิวเตอร์ร่วมกับการเรียนการสอน เพื่อให้ผู้เรียนเกิดแนวคิด (concept) ทางคณิตศาสตร์ และสามารถประยุกต์ใช้ในเรื่องต่างๆ ได้อย่างถูกต้อง

บรรณานุกรม

<http://www.mapleapps.com/powertools/matrixalgebra/matrixalgebra.shtml>

Richard Bellman, (1970), Introduction to Matrix Analysis, Second Edition, McGRAW - HILL, New York

Stephen Barnett, (1979), Matrix Methods for Engineers and Scientists, McGRAW - HILL, London