เทคนิคการสร้างรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าและดาวทอง : กรณี อาศัยรูปสี่เหลี่ยมทอง และรูปสามเหลี่ยมทอง

Technique for Construction of a Regular Pentagon and Golden star : using a Golden Rectangle and Triangle

สมนึก ภัททิยธนี
Somnuk Pattiyathani
ข้าราชการบำนาญ คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหาสารคาม
Distinguished Lecturer, Faculty of Education, Maha sarakham University
Corresponding author, E-mail :somnukp1@hotmail.com

สาระสังเขป

หลักการสร้างรูปเรขาคณิต ต้องใช้เฉพาะวงเวียนและสันตรงเท่านั้น นอกจากนี้เกาส์ (Gauss) นักคณิตศาสตร์ระดับ 1 ใน 3 ของโลกได้ค้นพบทฤษฎีที่เกี่ยวกับการสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ที่มีจำนวนเหลี่ยมเป็น**จำนวนเฉพาะ** ซึ่งจะสร้างได้ก็ต่อเมื่อ**จำนวนเหลี่ยม**ต้องอยู่ในรูป $f(n) = 2^{2^n}+1$ โดย n คือตัวเลขในลำดับเลขคณิตที่เริ่มต้นจาก 0 แล้วเพิ่มที่ละ 1 เช่น เมื่อ $n = 0$ คือ สามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า $n = 1$ และ $n = 2$ คือ การสร้างรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า และรูปสิบเจ็ดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าตามลำดับ เป็นต้น

แต่ในบทความนี้ จะเน้นเฉพาะเทคนิคการสร้างรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า อีกวิธีหนึ่งที่ต่างไปจากวิธีสร้างแบบดั้งเดิม ที่ไม่ได้กำหนดความยาวด้านไว้ล่วงหน้า เพราะจะสร้างได้ยากกว่าปกติ ส่วนวิธีแบบใหม่นี้สามารถกำหนดความยาวด้านไว้ล่วงหน้าและจะอาศัยอัตราส่วนทอง คือ 1.618 : 1 โดยเริ่มต้นจากการสร้าง**รูปสี่เหลี่ยมทอง** แล้วใช้ด้านกว้างของรูปสี่เหลี่ยมทองเป็นด้านฐานของ**รูปสามเหลี่ยมทอง** จากนั้นจะใช้มุมยอดของสามเหลี่ยมทองซึ่งกาง 36° เป็นหลักในการสร้างมุมภายในของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ซึ่งกาง 108° และจะมีความยาวของด้านเท่ากับความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมทองเช่นกัน มีผลทำให้สร้าง**รูปดาวทอง**ซ้อนขึ้นมาด้วย เทคนิควิธีนี้จะช่วยให้จดจำวิธีสร้างตามที่กำหนดความยาวด้านไว้ล่วงหน้า และเข้าใจเหตุผลเกี่ยวกับความยาวด้านรวมทั้งมุมภายในของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าได้ง่าย

คำสำคัญ: เทคนิคการสร้างรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าโดยอาศัยอัตราส่วนทอง คือ 1.618 : 1

รับบทความ 25 พฤษภาคม 2563 แก้ไขบทความ 3 กรกฎาคม 2563 ตอบรับบทความ 10 กรกฎาคม 2563
Received 25 May 2020 Revised 3 July 2020 Accepted 10 July 2020

Summary

Geometry is principally constructed by only compass and straightedge (i.e. ruler). In addition, Gauss, who is 1 of the top three world-class mathematicians, has discovered the theory of the construction of a regular polygon that has an amount of the edge in prime number. This regular polygon can be built when the amount of edge is $f(n) = 2^{2^n}+1$, where n is number in the arithmetic order starting from 0 and added one by one. For example, n = 0 is a construction of equilateral triangle, while n = 1 and n = 2 are construction of regular pentagon and hexagon, respectively.

This article emphasisonly an alternative technique for the construction of a regular pentagon, which differs from the traditional construction explained in some treatises. Starting from, building up the golden rectangle and using a golden ratio of 1.618:1. The base of the golden triangle will be built from the wide side of the golden rectangle. Then 36° top corner of the golden triangle will be used to construct 108° interior corner of a regular pentagon, which the length of an edge is equal to the width of the golden rectangle resulting in an overlapping golden star created. This technique will easily encourage remembrance of the construction process, and an understanding of the length of an edge and interior corner of the regular pentagon.

Keywords : The Technique of Construction of a Regular Pentagon Using a Golden Ratio of 1.618 : 1

บทนำ

หลักการสร้างรูปเรขาคณิต หมายถึงการใช้วงเวียนเพียงอย่างเดียวเพื่อใช้ในการสร้างรูปต่าง ๆ ตามที่โจทย์กำหนด ส่วนไม้บรรทัดมีไว้สำหรับขีดเส้นประกอบการสร้างรูป บางครั้งจึงเรียกว่า “สันตรง” (ไม่ได้ใช้วัดความยาว) ซึ่งหลักการดังกล่าวนี้ นักคณิตศาสตร์ได้คิดค้นขึ้นมาตั้งแต่สมัยโบราณ เปรียบเสมือนการเล่นเกมทางคณิตศาสตร์ที่มีคุณค่าและท้าทายภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดให้ซึ่งเป็นมรดกทางปัญญาดั้งเดิมของมนุษย์ และสามารถนำมาใช้ประโยชน์ได้จนถึงปัจจุบัน

ส่วนการสร้าง**รูปเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า**โดยใช้วงเวียนเพียงอย่างเดียว จะสร้างได้ง่ายในบางรูป เช่น สามเหลี่ยมด้านเท่า สี่เหลี่ยมจัตุรัส หรือหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่านอกจากนี้ก็เป็นรูปเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่สร้างได้ยากจนถึงขึ้นสร้างไม่ได้

ประเด็นที่น่าสนใจอย่างมากเกี่ยวกับการสร้าง**รูปเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า** ก็คือ **การสร้างรูปเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่มีจำนวนเหลี่ยมเป็นจำนวนเฉพาะเท่านั้น** (โดยการใช้วงเวียนอย่างเดียว) เพราะบางรูปสร้างได้ เช่น รูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า รูปสิบเจ็ดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า เป็นต้น บางรูปสร้างไม่ได้ เช่น รูปสิบเอ็ดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า รูปสิบสามเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า รูปยี่สิบเก้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า เป็นต้น คือสรุปได้ว่าไม่สามารถสร้างรูปเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าได้ตามที่ต้องการเสมอไป

หลักในการสร้างรูปเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่มีจำนวนเหลี่ยมเป็น**จำนวนเฉพาะ** ดังกล่าวนี้ ค้นพบโดยนักคณิตศาสตร์ระดับ 1 ใน 3 ของโลก คือ **คาร์ล ฟริดริคเกาส์ (Carl Friedrich Gauss)** หรือคนทั่วไปเรียกชื่อสั้น ๆ ว่า **เกาส์ (Gauss)** เกาส์เกิดเมื่อวันที่ 30 เมษายน ค.ศ. 1777 ที่เมือง Braunschweig ประเทศเยอรมนี

เกาส์ (Gauss) ได้ค้นพบทฤษฎีที่เกี่ยวกับการสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่มีจำนวนเหลี่ยมเป็น**จำนวนเฉพาะ** สามารถสร้างโดยใช้เพียงวงเวียนและสันตรงได้ก็ต่อเมื่อ**จำนวนเหลี่ยม**ต้องอยู่ในรูป $f(n) = 2^{2^n}+1$ หรือกล่าวได้ว่า การสร้างรูปเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่มีจำนวนเหลี่ยมเป็นจำนวนเฉพาะต้องเป็นไปตามสูตร ดังนี้

จำนวนเหลี่ยมของรูปที่สร้างได้ = $2^{2^n}+1$ เมื่อ n คือตัวเลขในลำดับเลขคณิตที่เริ่มต้นจาก 0 แล้วเพิ่มทีละ 1 ดังนี้

เมื่อ n = 0 จำนวนเหลี่ยมของรูปที่สร้างได้ = $2^{2^0}+1= 3$ คือรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

เมื่อ n = 1 จำนวนเหลี่ยมของรูปที่สร้างได้ = $2^{2^1}+1= 5$ คือรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

เมื่อ n = 2 จำนวนเหลี่ยมของรูปที่สร้างได้ = $2^{2^2}+1= 17$ คือรูปสิบเจ็ดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

เมื่อ n = 3 จำนวนเหลี่ยมของรูปที่สร้างได้ = $2^{2^3}+1= 257$

เมื่อ n = 4 จำนวนเหลี่ยมของรูปที่สร้างได้ = $2^{2^4}+1=$ 65,537

จากตัวอย่างดังกล่าวข้างต้น จะเห็นว่า การสร้างรูปเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่มี **จำนวนเหลี่ยมเป็นจำนวนเฉพาะ**จะสร้างได้เพียงบางรูปเท่านั้น ซึ่งจะเป็นไปตามสูตรที่เกาส์ (Gauss) ค้นพบโดยรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าจะสร้างได้ง่ายที่สุด นอกจากนั้นจะสร้างได้ยากขึ้นตามลำดับ แต่ต้องสร้างได้ดังตัวอย่างรูปที่ปรากฏให้เห็นในเอกสารตำราบางเล่ม

การสร้างรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

ในที่นี้ผู้เขียนจะเสนอเฉพาะเทคนิคการสร้างรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าอีกวิธีหนึ่งโดยอาศัยอัตราส่วนทอง คือ 1.618 : 1 ซึ่งจะต่างจากวิธีสร้างแบบเดิมที่มีกล่าวไว้แล้วในเอกสารตำราบางเล่มดังนั้น เพื่อความเข้าใจง่ายจึงแบ่งการสร้างเป็น 2 ตอน ดังนี้

ตอนที่ 1 ทบทวนการสร้างรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแบบดั้งเดิม

ตอนที่ 2 เทคนิคการสร้างรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า โดยอาศัยรูปสี่เหลี่ยมทองและรูปสามเหลี่ยมทอง

รายละเอียดแต่ละตอนเป็นดังนี้

ตอนที่ 1 ทบทวนการสร้างรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแบบดั้งเดิม

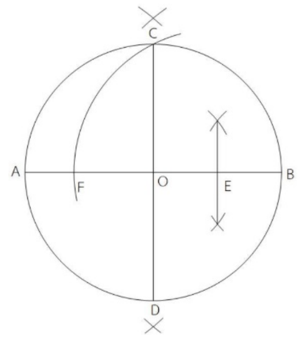
ผู้เขียนเคยเห็นเฉพาะการสร้าง**รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า**มาแล้ว ซึ่งเป็นรูปที่ค่อนข้างสร้างยาก และจำหลักการสร้างก็ยาก แต่ต้องสร้างได้เพราะเป็นไปตามหลักเกณฑ์ที่เกาส์ (Gauss) ค้นพบโดยมีขั้นตอนการสร้าง ดังนี้

<u>ขั้นที่ 1</u> ใช้ O เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวพอประมาณสร้างวงกลม 1 วง

<u>ขั้นที่ 2</u> ให้ AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมที่สร้างขึ้น แล้วใช้จุด A และ B เป็นจุดศูนย์กลางเพื่อสร้างเส้นผ่านศูนย์กลาง CD ให้ตั้งฉากกับเส้นผ่านศูนย์กลาง AB

<u>ขั้นที่ 3</u> แบ่งครึ่ง OB ที่จุด E

<u>ขั้นที่ 4</u> ใช้ E เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี EC เขียนส่วนโค้งให้ตัดเส้นผ่านศูนย์กลาง AB ที่จุด F ดังภาพที่ 1

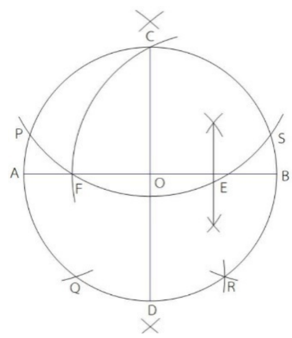


ภาพที่ 1

<u>ขั้นที่ 5</u> ใช้ C เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี CF เขียนส่วนโค้งให้ตัดเส้นรอบวงที่ P และ S (รัศมี EC $\neq$รัศมี CF)

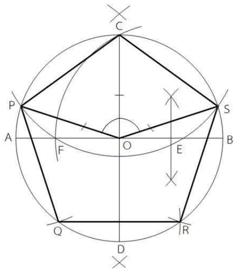
<u>ขั้นที่ 6</u> ใช้ P และ S เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี CF เช่นเดิม เขียนส่วนโค้งตัดเส้นรอบวงที่ Q และ R

<u>ขั้นที่ 7</u> ใช้ Q เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี CF เช่นเดิมเขียนส่วนโค้งจะตัดกับจุด R ที่สร้างอยู่ในขั้นที่ 6 พอดี ดังภาพที่ 2 แสดงว่าระยะ CP, PQ, QR, RS และ SC เท่ากันทั้งหมดจริง



ภาพที่ 2

<u>ขั้นที่ 8</u> ลากส่วนของเส้นตรง CP, PQ, QR, RS และ SC จะได้รูปห้าเหลี่ยม**เฉพาะด้านเท่ากันทั้งหมดจริง** คือรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่า CPQRS แสดงว่าขั้นตอนการสร้างส่วนที่**เกี่ยวกับด้าน**ถูกต้องแน่นอน ดังภาพที่ 3



ภาพที่ 3

ส่วนมุมภายในทั้ง 5 มุม มีขนาดเท่ากันคือมุมละ $180^\circ - \frac{360^\circ}{5} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$

จริงหรือไม่ ต้องอธิบายโดยใช้เหตุผลตามขั้นที่ 9 ถัดไป ดังนี้

<u>ขั้นที่ 9</u> เป็นการตรวจสอบว่า $\hat{C}$, $\hat{P}$, $\hat{Q}$, $\hat{R}$ และ $\hat{S}$ มีขนาดเท่ากัน คือ มุมละ 108° จริง หรือไม่ (เพราะมุมภายในของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าต้องกางมุมละ 108°) มีขั้นตอน ดังนี้

1. ต่อ OP และ OS จะได้รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว 2 รูป เท่ากันทุกประการ คือ $\triangle COP \cong \triangle COS$ เพราะเป็นไปตามเงื่อนไข ด.ด.ด. โดย $C\hat{O}P = C\hat{O}S$ซึ่งเป็นมุมยอด ดังนั้น **มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว** ทั้ง 2 รูป คือ 4 มุมเท่ากันหมด

2. ถ้าต่อ OQ และ OR จะได้รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วอีก 3 รูป เท่ากันทุกประการ เช่นเดียวกับเหตุผลของ $\triangle COP \cong \triangle COS$ จึงมีผลทำให้**มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว**อีก 3 รูปคือ 6 มุมเท่ากันหมด

3. สรุปได้ว่า **มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว**ทั้ง 5 รูป จำนวน 10 มุม มีขนาดเท่ากัน ดังนั้น**มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว** 2 มุม รวมกันเท่ากับมุมภายในของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่า 1 มุม จึงมีผลทำให้ $\hat{C} = \hat{P} = \hat{Q} = \hat{R} = \hat{S}$โดยมีขนาดของมุมภายในมุมละ $180^\circ - \frac{360^\circ}{5} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$ จริง จึงเป็นการสร้างรูปที่ถูกต้องแน่นอน

ข้อสังเกต การสร้างรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าด้วยวิธีดังกล่าวนี้ จะกำหนดความยาวแต่ละด้านตามที่ต้องการย่อมไม่ได้ เพราะขึ้นแรกเป็นการสร้างรูปวงกลม ดังนั้นหากต้องการกำหนดความยาวด้านไว้ล่วงหน้าด้วย ต้องอาศัยความรู้เกี่ยวกับตรีโกณมิติเพื่อคำนวรเบื้องต้นว่าการสร้างวงกลมเป็นขั้นแรกนั้นต้องใช้ความยาวของรัศมีเท่าไร ซึ่งเป็นเรื่องซับซ้อนเพิ่มขึ้น จึงไม่เป็นเรื่องที่จูงใจให้สร้างโดยวิธีการนี้ (ถ้ากำหนดความยาวด้านด้วย)

ตอนที่ 2 เทคนิคการสร้างรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า โดยอาศัยรูปสี่เหลี่ยมทองและรูปสามเหลี่ยมทอง

การสร้างรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ที่ผู้เขียนจะกล่าวต่อไปนี้ จะอาศัยการสร้างอีกแนวหนึ่งโดยผู้เขียนคิดขึ้นมาเอง ซึ่งอาจจะไปตรงกับการสร้างในตำราบางเล่มที่มีอยู่แล้วก็ได้กล่าวคือจะใช้อัตราส่วนทอง คือ 1.618 : 1 เป็นหลัก ดังนั้นในทางปฏิบัติจะเริ่มต้นโดยใช้เทคนิคการสร้างรูปสี่เหลี่ยมทองและรูปสามเหลี่ยมทองซ้อนกัน จากนั้นจะสร้างรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าได้อย่างง่าย และยังสามารถสร้างดาวทองได้ในขั้นสุดท้าย (ดาวทองคือรูปดาว 5 แฉก ที่มีมุมแต่ละแฉกกาง 36° เท่ากับมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมทอง) ยิ่งกว่านี้ยังสามารถกำหนดความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าไว้ก่อนจะสร้างด้วยซึ่ง **เป็นวิธีการที่ง่ายกว่าวิธีดั้งเดิม** การสร้างจะแบ่งขั้นตอนออกเป็น 4 ขั้น เมื่อสร้างเสร็จ รูปเรขาคณิตทั้ง 4 รูป จะซ้อนอยู่ในรูปเดียวกัน มีขั้นตอนการสร้างดังนี้ (ต้องใช้เฉพาะวงเวียนและสันตรงเท่านั้น)

ขั้นที่ 1 สร้างรูปสี่เหลี่ยมทองจากรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

รูปสี่เหลี่ยมทอง คือ รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีอัตราส่วนของด้านยาวต่อด้านกว้างเท่ากับ 1.618 : 1 มีขั้นตอนการสร้าง ดังนี้

1. สร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD ดังรูปที่ 1

รูปที่ 1

2. แบ่งด้าน BC และ AD ที่จุด O_1 และ O_2 ตามลำดับ

3. ใช้ O_1 และ O_2 เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี O_1D และ O_2C เขียนส่วนโค้งให้ตัดกันที่จุด G

4. ลากเส้นตรง BC ขึ้นไปตัดกับส่วนโค้ง O_1D ที่จุด E ส่วนจุด F ก็เป็นผลเช่นเดียวกัน แล้วลาก EF (ในเอกสารตำราทั่ว ๆ ไป มักจะสร้างเฉพาะรัศมี O_1D ข้างเดียว ซึ่งจะสร้างรูปสี่เหลี่ยมทองยากและมีความคลาดเคลื่อนได้ง่าย)

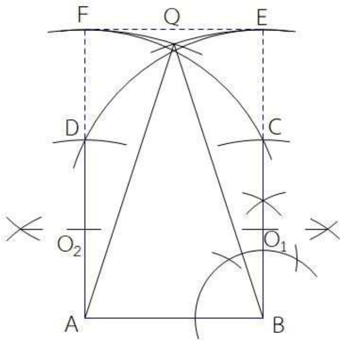
5. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ABEF คือ รูปสี่เหลี่ยมทองโดยมีอัตราส่วนของด้านยาว (AF หรือ BE) ต่อด้านกว้าง (AB หรือ EF) เท่ากับ 1.618 : 1

ขั้นที่ 2 สร้างรูปสามเหลี่ยมทองให้อยู่บนรูปสี่เหลี่ยมทอง

รูปสามเหลี่ยมทอง คือ **รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว** ที่มีอัตราส่วนของด้านประกอบมุมยอดด้านหนึ่งต่อด้านฐานเท่ากับ 1.618 : 1 และมุมยอดมีขนาด 36 °

การสร้างรูปสามเหลี่ยมทองครั้งนี้จะใช้ด้านกว้างของรูปสี่เหลี่ยมทองคือ ด้าน AB เป็น**ด้านฐาน**ของรูปสามเหลี่ยมทอง มีขั้นตอนการสร้าง ดังนี้

1. ใช้ A และ B จากรูปที่ 1 เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีเท่ากับด้านยาวของรูปสี่เหลี่ยมทอง (คือ AF หรือ BE) เขียนส่วนโค้งให้ตัดกันที่จุด Q ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2

2. ลากเส้นตรง AQ และ BQ

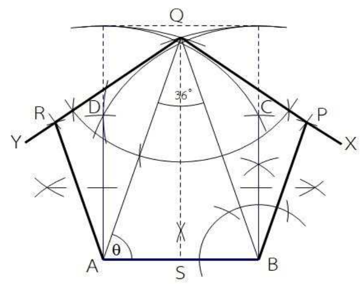
3. รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว AQB เป็นรูปสามเหลี่ยมทองโดยมีอัตราส่วนของด้านประกอบมุมยอดด้านหนึ่งต่อด้านฐานเท่ากับ 1.618 : 1 จริง (เพราะ AQ = BQ = AF = BE) ส่วนมุมยอดที่ Q มีขนาด 36° จริงหรือไม่ ต้องดำเนินการในขั้นถัดไป คือ ขั้นที่ 2.3.1 – 2.3.3 ดังนี้

3.1 ใช้วงเวียนแบ่งครึ่งด้าน AB แล้วลาก เส้นตรงจากจุด Q มาแบ่งครึ่งด้านAB ที่จุด S จะได้ $\triangle AQS \cong \triangle BQS$ (เส้น QS จะตั้งฉากกับด้าน AB และ แบ่งครึ่งมุมยอด Q ด้วย) ดังรูปที่ 3

3.2 กำหนดให้ $S\hat{A} = \theta$ พิจารณาค่า $\cos\theta$ จาก $\triangle AQS$

ดังนั้น $\cos\theta = \frac{AS}{AQ} = \frac{0.5}{1.618} = 0.309 = \cos 72^\circ$

3.3 แสดงว่ามุมยอดของรูปสามเหลี่ยมทอง AQB กาง 36° จริง (หรือมุมที่ฐานกางมุมละ 72° จริง)



รูปที่ 3

ขั้นที่ 3 สร้างรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าให้ซ้อนอยู่บนรูปสี่เหลี่ยมทองและรูปสามเหลี่ยมทอง

รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าจะมีขนาดของมุมภายในแต่ละมุมเท่ากับ 108° เทคนิคการสร้างในที่นี้จึงมีขั้นตอน ดังนี้

1. เนื่องจากรูปสามเหลี่ยมทองที่สร้างเสร็จแล้ว (รูปที่ 3) มีมุมยอดที่ Q กาง 36° ดังนั้นใช้ Q เป็นจุดศูนย์กลางรัศมีพอประมาณเพื่อสร้างมุมขนาด 36° คือเท่ากับมุม $A\hat{Q}B$ ที่ด้านซ้ายและด้านขวาของด้านประกอบมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมทอง AQB จะได้ขนาดของมุม $X\hat{Q}Y = 108^\circ$ เท่ากับมุมภายในแต่ละมุมของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ดังรูปที่ 3

2. ใช้ Q เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีเท่ากับระยะ AB เขียนส่วนโค้งตัด QX และ QY ที่จุด P และจุด R ตามลำดับ

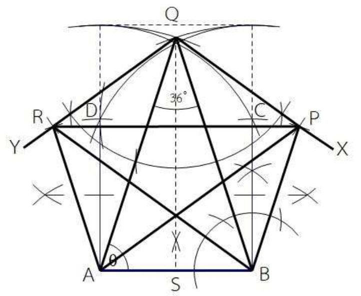
3. ลากเส้นตรง AR และ BP จะได้ รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ABPQR ตามต้องการ โดยมีมุมภายในแต่ละมุมกาง 108° จริง

หมายเหตุ ใช้ A และ B เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี AB เขียนส่วนโค้งตัดกับ QX และ QY พบว่าตัดได้ตรงกับจุด P และ จุด R จริงแสดงว่า การสร้างรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าถูกต้องตามขนาดของด้านและมุมแน่นอน

ขั้นที่ 4 สร้างรูปดาวทอง

ดาวทอง คือ รูปดาวห้าแฉก โดยมีมุมภายในแต่ละมุม (หรือแต่ละแฉก) มีขนาดเท่ากับ 36° (มีขนาดของมุมยอดเท่ากับมุมยอดของสามเหลี่ยมทอง) มีขั้นตอนการสร้าง ดังนี้

ลากเส้นทแยงมุมทั้ง 5 เส้น ของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าตามที่สร้างขึ้นในขั้นที่ 3 จะได้เป็นรูปดาวห้าแฉก โดยมีอัตราส่วนของเส้นทแยงมุมหนึ่งเส้นต่อความยาวด้านหนึ่งด้านของรูปดาวทองเท่ากับ 1.618 : 1 คือ เป็นอัตราส่วนเดียวกับรูปสี่เหลี่ยมทอง และรูปสามเหลี่ยมทอง ดังรูปที่ 4



รูปที่ 4

บทสรุป

จากขั้นตอนทั้งหมดที่กล่าวมาในตอนที่ 2 สรุปได้ดังนี้

1. การสร้างรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าโดยอาศัยรูปสี่เหลี่ยมทองและรูปสามเหลี่ยมทองมีขั้นตอนการสร้างง่าย ๆ พอ ๆ กับวิธีการสร้างแบบดั้งเดิม ที่ปรากฏอยู่ในเอกสารตำราบางเล่ม แต่วิธีที่ผ่าน ๆ มาการอ้างเหตุผลว่าได้รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่มีมุมภายในกางมุมละ 108° เป็นวิธีพิสูจน์ยากกว่า

2. สามารถจำหลักการได้อย่างถูกต้องแม่นยำ และผลจากการสร้างเสร็จขั้นถัดมาสามารถสร้างรูปดาวทองได้ เช่นเดียวกับการสร้างรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแบบดั้งเดิม

3. ได้รูปที่เป็นอัตราส่วนทอง คือ 1.618 : 1 ทั้ง 3 รูปที่ซ้อนกันเข้าทำนองสามทอง คือ รูปสี่เหลี่ยมทอง และรูปดาวทอง

4. วิธีนี้สามารถกำหนดความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าไว้ล่วงหน้า และสร้างได้ง่ายกว่า เมื่อเทียบกับวิธีการดั้งเดิม ซึ่งหากกำหนดความยาวด้านไว้ล่วงหน้าต้องอาศัยวิธีการของตรีโกณมิติ เพื่อคำนวณหาความยาวของรัศมีของวงกลม จะกลายเป็นเรื่องยุ่งยากและซับซ้อน

5. ถ้าจะดึงเฉพาะรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าออกจาก 3 รูปที่ซ้อนกัน ก็กระทำได้ง่าย

6. สุดท้ายนี้สรุปว่า ผู้เขียนยังไม่เคยเห็นวิธีการสร้างรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าตามขั้นตอนที่กล่าวมาไม่ว่าจะอยู่ในหลักสูตรการเรียนการสอนระดับใด ๆ หรือจากเอกสารตำราใด ๆ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่ง ช่างตรงกับเจตนารมณ์ของนักคณิตสาสตร์สมัยก่อนที่ต้องการฝึกให้สร้างรูปเรขาคณิต โดยใช้เฉพาะวงเวียนและสันตรงเท่านั้น เปรียบเสมือนการเล่นเกมเชิงคณิตศาสตร์ที่มีคุณค่า และท้าทาย ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดให้ซึ่งเป็นมรดกทางปัญญาดั้งเดิมของมนุษย์ สามารถนำมาใช้ประโยชน์ได้ในปัจจุบัน และอนาคตอย่างสร้างสรรค์

เอกสารอ้างอิง

คณะกรรมการสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์. (2532). **วารสารคณิตศาสตร์ ปริมา 33 ฉบับที่ 370 – 371 , ก.ค. – ส.ค. 2532 หน้า 2-6**.

บุญธรรม ภัทราจารุกุล. (2556). **เขียนแบบเทคนิคเบื้องต้น**. กรุงเทพฯ: ซีเอ็ดยูเคชั่น.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2559). **หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐานคณิตศาสตร์ เล่ม 1ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1**. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2561). **หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐานคณิตศาสตร์**

เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2551). **หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐานคณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3**. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2547). **หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2**. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภา ลาดพร้าว.

สมนึก ภัททิยธนี. (2553). **คณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2**. กาฬสินธุ์: ประสานการพิมพ์.

สมนึก ภัททิยธนี. (2555). **คณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3**. กาฬสินธุ์: ประสานการพิมพ์.