

การจำลองแบบมอนติคาร์โลสำหรับประมาณค่าฐานนิยมของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน เมื่อข้อมูลมีค่าสูญหาย

The Monte Carlo Simulation for Estimating the Mode of Inverse Gaussian Distribution with Missing Values

วราฤทธิ์ พานิชกิจโกศลกุล¹

Wararit Panichkitkosolkul¹

บทคัดย่อ

การศึกษานี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเสนอวิธีการประมาณค่าฐานนิยมของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน เมื่อข้อมูลมีค่าสูญหาย และเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าฐานนิยม 3 วิธี คือ 1) วิธีอย่างง่าย 2) วิธีปรับค่าฐานนิยมด้วยเทอมค่าคงที่ $(n + 1) / n$ และ 3) วิธีปรับค่าฐานนิยมด้วยเทอมค่าคงที่ $(n + 2) / n$ โดยการเปรียบเทียบค่าความเอนเอียงสัมบูรณ์ ($|Bias|$) และค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean square error : MSE) ของค่าประมาณ กำหนดขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 20, 40, 60, 80 และ 100 กำหนดค่าพารามิเตอร์ μ เท่ากับ 1 พารามิเตอร์ λ เท่ากับ 1, 3, 5, 10, 15 และ 20 และร้อยละของค่าสูญหาย (p) เท่ากับ ร้อยละ 5 และ 10 การศึกษานี้ใช้วิธีการจำลองแบบมอนติคาร์โล และทำการทดลองซ้ำๆ กัน 10,000 ครั้งในแต่ละสถานการณ์ ผลการวิจัยพบว่า

วิธีปรับค่าฐานนิยมด้วยเทอมค่าคงที่ $(n + 2) / n$ ให้ค่าความเอนเอียงสัมบูรณ์ ($|Bias|$) และค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) ต่ำที่สุด ทุกกรณีที่ศึกษา รองลงมาคือ วิธีปรับค่าฐานนิยมด้วยเทอมค่าคงที่ $(n + 1) / n$ และวิธีอย่างง่าย ตามลำดับ

คำสำคัญ : การจำลองแบบมอนติคาร์โล, ค่าฐานนิยม, การแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน, ค่าสูญหาย

ABSTRACT

The objectives of this study were to propose the estimation method for the mode of Inverse Gaussian distribution with missing values and to compare three estimation methods for the mode. Those methods were the simple method, the adjusted mode method with the constant term $(n + 1) / n$, and the adjusted mode method with the constant term $(n + 2) / n$, using the absolute bias ($|Bias|$) and the mean square errors (MSE) of estimation value. The sample sizes (n) were equal to 20, 40, 60, 80, and 100 whereas the parameter μ was 1, the parameters λ were 1, 3, 5, 10, 15,

and 20 and the percentages of missing values (p) were 5% and 10%. This study used the Monte Carlo simulation method. The experiment was repeated 10,000 times for each condition.

¹ สด.ม. (สถิติ) ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ศูนย์รังสิต
รับต้นฉบับ 22 เมษายน 2553 รับลงพิมพ์ 22 พฤษภาคม 2553



The results of the study revealed that the estimation method for the mode using the adjusted mode method with the constant term $(n + 2) / n$ resulted in the lowest values of the absolute bias ($|Bias|$) and the mean square errors (MSE) in all conditions. The next effective methods were the adjusted mode method with the constant term $(n + 1) / n$ and the simple method respectively.

Keywords : Monte Carlo Simulation, Mode, Inverse Gaussian Distribution, Missing Values

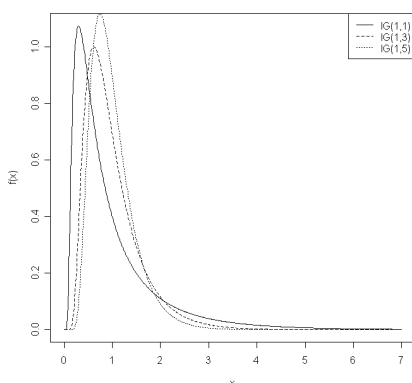
บทนำ

การแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน (Inverse Gaussian distribution) เป็นการแจกแจงหนึ่งที่น่าสนใจประยุกต์ใช้กับปัญหาต่างๆ เช่น การวิเคราะห์ราคาหุ้น ปัญหาด้านชีววิทยา อุทกภูมิศาสตร์ อุตุนิยมนวิทยา และความเชื่อถือได้ของผลิตภัณฑ์ เป็นต้น (Cohen and Whitten, 1988 : 77) โดยมีนักวิจัยหลายท่านที่สนใจศึกษาเกี่ยวกับการแจกแจงดังกล่าว อาทิ Halphen, Tweedie, Wald และ Wasan, Chhikara, Folks, Seshadri, Cohen และ Jorgenson เป็นต้น (Balakrishnan and Chen, 1997 : 1) ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (Probability density function) ของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน เขียนได้ดังนี้ (Krishnamoorthy, 2006 : 281)

$$f(x|\mu, \lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} \exp\left(\frac{-\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right)$$

โดยที่ $x > 0$, $\mu, \lambda > 0$

กราฟของฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นแสดงดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 ฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจง

อินเวอร์สเกาส์เซียน เมื่อ $\mu = 1$ และ $\lambda = 1, 3$ และ 5

สมบัติที่สำคัญของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน มีดังนี้

ค่าเฉลี่ย	μ
ความแปรปรวน	μ^3 / λ
ฐานนิยม	

$$\mu \left[\sqrt{1 + \frac{9\mu^2}{4\lambda^2}} - \frac{3\mu}{2\lambda} \right]$$

ในบางครั้งผู้วิเคราะห์อาจประสบปัญหาเกี่ยวกับการเก็บรวบรวมข้อมูล เช่น ข้อมูลบางค่าสูญหาย (Missing values) จึงมีผลกระทบทำให้การประมาณค่าพารามิเตอร์คลาดเคลื่อน โดยทั่วไปมักแก้ปัญหาการสูญหายของข้อมูลด้วยการตัดข้อมูลสูญหายทิ้ง และนำข้อมูลที่สมบูรณ์มาทำการวิเคราะห์ จึงมีผลทำให้ข้อมูลมีปริมาณลดน้อยลง แต่ในบางครั้งข้อมูลอาจมีจำนวนไม่มากนัก จึงไม่สามารถตัดข้อมูลออกได้ ทำให้ต้องมีการประมาณค่าสูญหาย ส่วนวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ μ และ λ สามารถประมาณค่าได้หลายวิธี เช่น วิธีความควรจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood method : ML) และวิธีการประมาณแบบไม่เอนเอียงซึ่งมีความแปรปรวนต่ำที่สุด (Minimum Variance Unbiased Estimation method: MVUE) เป็นต้น (Evans, Hastings, and Peacock, 2000) ซึ่ง เมื่อได้ค่าประมาณพารามิเตอร์ $\hat{\mu}$ และ $\hat{\lambda}$ แล้ว ขั้นตอนต่อไปจะนำค่าประมาณพารามิเตอร์ไปคำนวณค่าสถิติต่างๆ เช่น ค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน หรือฐานนิยม เป็นต้น วิธีดังกล่าวเรียกว่า วิธีอย่างง่าย (Simple method) ผู้วิจัยจึงมีแนวคิดที่จะนำเทอมค่าคงที่มาปรับให้ค่าประมาณของฐานนิยมมีความคลาดเคลื่อนน้อยลง โดยทดลองกับเทอมค่าคงที่ในรูปแบบต่างๆ

ดังนั้น ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้จึงเสนอวิธีการประมาณค่าฐานนิยมของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน เมื่อข้อมูลมีค่าสูญหาย และเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าฐานนิยม 3 วิธี คือ 1) วิธีอย่างง่าย 2) วิธีปรับค่าฐานนิยมด้วยเทอมค่าคงที่ $(n + 1) / n$ และ 3) วิธีปรับค่าฐานนิยมด้วยเทอมค่าคงที่ $(n + 2) / n$ โดยการเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean square error : MSE) และค่าความเอนเอียงสัมบูรณ์ (Absolute bias : $|Bias|$) ของค่าประมาณ สำหรับขอบเขตของการศึกษา มีดังต่อไปนี้

1. กำหนดขนาดตัวอย่างที่ใช้ (n) เท่ากับ 20, 40, 60, 80 และ 100
2. กำหนดค่าพารามิเตอร์ μ เท่ากับ 1
3. กำหนดค่าพารามิเตอร์ λ เท่ากับ 1, 3, 5, 10, 15 และ 20
4. กำหนดร้อยละของค่าสูญหาย (p) เท่ากับร้อยละ 5 และ 10
5. ประเมินค่าพารามิเตอร์ μ และ λ ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ใช้วิธีการจำลองแบบมอนติคาร์โลด้วยเครื่องไมโครคอมพิวเตอร์ โดยใช้โปรแกรม R เวอร์ชัน 2.8.0 และกำหนดให้เครื่องคอมพิวเตอร์ทำงานซ้ำๆ กัน 10,000 ครั้งในแต่ละสถานการณ์

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้มีวิธีดำเนินการวิจัยดังนี้

การจำลองข้อมูลที่ใช้ในการวิจัย

จำลองข้อมูลที่ใช้โดยการสร้างตัวแปรสุ่ม X ซึ่งมีการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนด้วยพารามิเตอร์ μ และ λ ตามที่กำหนดไว้ในขอบเขตของการศึกษา

การประมาณค่าสูญหาย

สมมติว่า X_k เป็นค่าสูญหาย ประเมินค่า X_k โดยเลือกข้อมูลมาอย่างสุ่มจากข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้ การประมาณค่าพารามิเตอร์ μ และ λ ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด

เมื่อสร้างตัวแปรสุ่ม X ที่มีการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน และประมาณค่าสูญหายแล้ว ต่อไปจะประมาณค่าพารามิเตอร์ μ และ λ ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (Evans, Hastings, and Peacock, 2000 : 116)

ตัวประมาณความควรจะเป็นสูงสุดของ μ คือ

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

ตัวประมาณความควรจะเป็นสูงสุดของ λ คือ

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\left(\sum_{i=1}^n X_i^{-1} - (\bar{X})^{-1} \right)}$$

การประมาณค่าฐานนิยมของข้อมูลด้วยวิธีการที่ศึกษา

เมื่อประมาณค่าพารามิเตอร์ μ และ λ นำค่าประมาณ $\hat{\mu}$ และ $\hat{\lambda}$ ที่ได้ ประเมินค่าฐานนิยม ด้วยวิธีการที่ศึกษา

- 1) วิธีอย่างง่าย ตัวประมาณค่าฐานนิยม คือ

$$\hat{M}_S = \hat{\mu} \left[\sqrt{1 + \frac{9\hat{\mu}^2}{4\hat{\lambda}^2}} - \frac{3\hat{\mu}}{2\hat{\lambda}} \right]$$

- 2) วิธีปรับค่าฐานนิยมด้วยเทอมค่าคงที่ $(n + 1) / n$ ตัวประมาณค่าฐานนิยม คือ

$$\hat{M}_{C_1} = \hat{\mu} \left(\frac{n+1}{n} \right) \left[\sqrt{1 + \frac{9\hat{\mu}^2}{4\hat{\lambda}^2}} - \frac{3\hat{\mu}}{2\hat{\lambda}} \right]$$

- 3) วิธีปรับค่าฐานนิยมด้วยเทอมค่าคงที่ $(n + 2) / n$ ตัวประมาณค่าฐานนิยม คือ

$$\hat{M}_{C_2} = \hat{\mu} \left(\frac{n+2}{n} \right) \left[\sqrt{1 + \frac{9\hat{\mu}^2}{4\hat{\lambda}^2}} - \frac{3\hat{\mu}}{2\hat{\lambda}} \right]$$

การคำนวณค่าความเอนเอียงสัมบูรณ์และค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของค่าประมาณของแต่ละวิธี

ค่าความเอนเอียงสัมบูรณ์ ($|Bias|$) ของค่าประมาณ คำนวณจาก

$$|Bias| = \left| \frac{\sum_{i=1}^{10,000} \hat{M}_{ki}}{10,000} - M \right|$$



ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) ของ
ค่าประมาณ คำนวณจาก

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^{10,000} (M - \hat{M}_{ki})^2}{10,000}$$

เมื่อ M แทน ค่าฐานนิยมของประชากร
 $\hat{M}_{ki}$ แทน ค่าประมาณของฐานนิยม ซึ่งคำนวณ
จากวิธีที่ k ในการทำซ้ำครั้งที่ i
 k แทน วิธีการประมาณค่าฐานนิยม

ผลการวิจัย

ผลการวิจัยมีดังนี้

ในการนำเสนอผลการศึกษเพื่อความสะดวกจะ
ใช้สัญลักษณ์ต่างๆแทนความหมาย ดังนี้

S	หมายถึง วิธีอย่างง่าย
C_1	หมายถึง วิธีปรับค่าฐานนิยมด้วยเทอม ค่าคงที่ $(n+1)/n$
C_2	หมายถึง วิธีปรับค่าฐานนิยมด้วยเทอม ค่าคงที่ $(n+2)/n$
$ Bias $	หมายถึง ค่าความเอนเอียงสัมบูรณ์
MSE	หมายถึง ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสอง เฉลี่ย

ผลการเปรียบเทียบค่าความเอนเอียงสัมบูรณ์
และค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของค่าประมาณ นำเสนอ
ดังตารางที่ 1 และ 2 ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

การเปรียบเทียบค่าความเอนเอียงสัมบูรณ์

ในทุกระดับของขนาดตัวอย่าง ($n = 20, 40, 60, 80, 100$ และ 200) ทุกระดับของค่าพารามิเตอร์ ($\lambda = 1, 3, 5, 10, 15$ และ 20) และทุกระดับของร้อยละของค่า
สูญหาย ($p = 0.05$ และ 0.10) วิธีปรับค่าฐานนิยมด้วย

เทอมค่าคงที่ $(n+2)/n$ ให้ค่าความเอนเอียงสัมบูรณ์
($|Bias|$) ต่ำที่สุด รองลงมาคือ วิธีปรับค่าฐานนิยมด้วย
เทอมค่าคงที่ $(n+1)/n$ และวิธีอย่างง่าย ตามลำดับ

การเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย

ในทุกระดับของขนาดตัวอย่าง ($n = 20, 40, 60, 80, 100$ และ 200) ทุกระดับของค่าพารามิเตอร์ ($\lambda = 1, 3, 5, 10, 15$ และ 20) และทุกระดับของร้อยละของค่า
สูญหาย ($p = 0.05$ และ 0.10) วิธีปรับค่าฐานนิยมด้วย
เทอมค่าคงที่ $(n+2)/n$ ให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสอง
เฉลี่ย (MSE) ต่ำที่สุด รองลงมาคือ วิธีปรับค่าฐานนิยมด้วย
เทอมค่าคงที่ $(n+1)/n$ และวิธีอย่างง่าย ตามลำดับ

สรุปผลการวิจัย

ผลการวิจัยสรุปได้ดังนี้

ในประมาณค่าฐานนิยมของการแจกแจง
อินเวอร์สเกาส์เซียน เมื่อข้อมูลมีค่าสูญหาย ควรเลือกใช้วิธี
ปรับค่าฐานนิยมด้วยเทอมค่าคงที่ $(n+2)/n$ เนื่องจากวิธี
นี้เป็นวิธีที่ให้ค่าความเอนเอียงสัมบูรณ์ ($|Bias|$) และค่า
ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) ต่ำที่สุดในทุก
กรณีการศึกษา รองลงมา คือ วิธีปรับค่าฐานนิยมด้วยเทอม
ค่าคงที่ $(n+1)/n$ และวิธีอย่างง่าย ตามลำดับ ซึ่งมีสูตร
ในประมาณค่าดังนี้

$$\hat{M} = \hat{\mu} \left(\frac{n+2}{n} \right) \left[\sqrt{1 + \frac{9\hat{\mu}^2}{4\hat{\lambda}^2}} - \frac{3\hat{\mu}}{2\hat{\lambda}} \right]$$

$$\text{โดยที่ } \hat{\mu} = \bar{X} \text{ และ } \hat{\lambda} = \frac{n}{\left(\sum_{i=1}^n X_i^{-1} - (\bar{X})^{-1} \right)}$$

ตารางที่ 1 ค่าความเอนเอียงสัมบูรณ์ ($|Bias|$) และค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) ของค่าประมาณฐานนิยมของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน เมื่อ μ เท่ากับ 1 และ $p = 0.05$

n	λ	$ Bias $			MSE		
		วิธี S	วิธี C_1	วิธี C_2	วิธี S	วิธี C_1	วิธี C_2
20	1	0.1300	0.1214	0.1127*	0.0181	0.0161	0.0142*
	3	0.3697	0.3573	0.3449*	0.1378	0.1288	0.1202*
	5	0.4725	0.4589	0.4453*	0.2240	0.2114	0.1992*
	10	0.5694	0.5548	0.5402*	0.3247	0.3083	0.2924*
	15	0.6056	0.5906	0.5757*	0.3671	0.3492	0.3318*
	20	0.6243	0.6091	0.5940*	0.3900	0.3713	0.3531*
40	1	0.1356	0.1315	0.1273*	0.0190	0.0179	0.0168*
	3	0.3762	0.3702	0.3641*	0.1420	0.1375	0.1331*
	5	0.4788	0.4722	0.4655*	0.2296	0.2233	0.2171*
	10	0.5756	0.5684	0.5613*	0.3315	0.3233	0.3153*
	15	0.6118	0.6045	0.5972*	0.3745	0.3656	0.3568*
	20	0.6308	0.6234	0.6160*	0.3981	0.3888	0.3796*
60	1	0.1371	0.1343	0.1315*	0.0192	0.0184	0.0177*
	3	0.3781	0.3741	0.3701*	0.1433	0.1403	0.1373*
	5	0.4809	0.4765	0.4722*	0.2315	0.2273	0.2232*
	10	0.5778	0.5731	0.5684*	0.3340	0.3286	0.3232*
	15	0.6141	0.6093	0.6044*	0.3773	0.3713	0.3654*
	20	0.6330	0.6281	0.6232*	0.4008	0.3946	0.3885*
80	1	0.1379	0.1359	0.1338*	0.0193	0.0187	0.0182*
	3	0.3790	0.3760	0.3730*	0.1438	0.1416	0.1394*
	5	0.4819	0.4787	0.4754*	0.2324	0.2293	0.2262*
	10	0.5787	0.5752	0.5717*	0.3350	0.3310	0.3269*
	15	0.6151	0.6114	0.6078*	0.3784	0.3739	0.3695*
	20	0.6340	0.6304	0.6267*	0.4021	0.3974	0.3928*
100	1	0.1387	0.1370	0.1354*	0.0194	0.0190	0.0186*
	3	0.3797	0.3774	0.3750*	0.1444	0.1426	0.1408*
	5	0.4827	0.4800	0.4774*	0.2331	0.2306	0.2281*
	10	0.5795	0.5767	0.5739*	0.3359	0.3327	0.3294*
	15	0.6158	0.6129	0.6100*	0.3792	0.3757	0.3721*
	20	0.6346	0.6317	0.6288*	0.4028	0.3991	0.3954*

* หมายถึง วิธีการประมาณค่าที่ให้ค่า $|Bias|$ ต่ำที่สุด หรือค่า MSE ต่ำที่สุด



ตารางที่ 2 ค่าความเอนเอียงสัมบูรณ์ ($|Bias|$) และค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) ของค่าประมาณฐานนิยมของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน เมื่อ μ เท่ากับ 1 และ $p = 0.10$

n	λ	$ Bias $			MSE		
		วิธี S	วิธี C_1	วิธี C_2	วิธี S	วิธี C_1	วิธี C_2
20	1	0.1296	0.1209	0.1122*	0.0182	0.0161	0.0143*
	3	0.3702	0.3578	0.3454*	0.1381	0.1292	0.1206*
	5	0.4726	0.4590	0.4454*	0.2242	0.2116	0.1994*
	10	0.5687	0.5540	0.5394*	0.3239	0.3075	0.2916*
	15	0.6052	0.5902	0.5752*	0.3666	0.3487	0.3313*
	20	0.6244	0.6092	0.5940*	0.3901	0.3714	0.3532*
40	1	0.1355	0.1313	0.1271*	0.0190	0.0179	0.0168*
	3	0.3760	0.3699	0.3639*	0.1419	0.1374	0.1330*
	5	0.4785	0.4719	0.4652*	0.2294	0.2231	0.2169*
	10	0.5754	0.5683	0.5612*	0.3314	0.3232	0.3152*
	15	0.6121	0.6048	0.5974*	0.3748	0.3659	0.3571*
	20	0.6309	0.6235	0.6160*	0.3982	0.3889	0.3797*
60	1	0.1371	0.1343	0.1316*	0.0192	0.0185	0.0178*
	3	0.3781	0.3741	0.3701*	0.1433	0.1403	0.1373*
	5	0.4810	0.4766	0.4722*	0.2316	0.2274	0.2233*
	10	0.5776	0.5729	0.5682*	0.3338	0.3284	0.3230*
	15	0.6139	0.6090	0.6042*	0.3770	0.3710	0.3652*
	20	0.6329	0.6280	0.6231*	0.4007	0.3945	0.3883*
80	1	0.1380	0.1359	0.1338*	0.0193	0.0188	0.0182*
	3	0.3792	0.3762	0.3732*	0.1441	0.1418	0.1396*
	5	0.4820	0.4788	0.4755*	0.2326	0.2294	0.2263*
	10	0.5787	0.5751	0.5716*	0.3350	0.3309	0.3269*
	15	0.6150	0.6114	0.6077*	0.3783	0.3738	0.3694*
	20	0.6338	0.6302	0.6265*	0.4018	0.3972	0.3925*
100	1	0.1385	0.1369	0.1352*	0.0194	0.0190	0.0185*
	3	0.3797	0.3773	0.3750*	0.1444	0.1426	0.1408*
	5	0.4826	0.4800	0.4773*	0.2330	0.2305	0.2280*
	10	0.5794	0.5766	0.5737*	0.3358	0.3325	0.3293*
	15	0.6158	0.6129	0.6100*	0.3792	0.3757	0.3721*
	20	0.6346	0.6317	0.6288*	0.4028	0.3991	0.3954*

* หมายถึง วิธีการประมาณค่าที่ให้ค่า $|Bias|$ ต่ำที่สุด หรือค่า MSE ต่ำที่สุด



เอกสารอ้างอิง

- Balakrisnan, N. and Chen, W.S. (1997). **Tables for Order Statistics from Inverse Gaussian Distributions with Applications**. Florida: CRC Press.
- Balakrisnan, N. and Nevzorov, V.B. (2003). **A Primer on Statistical Distribution**. New Jersey: John Wiley & Sons.
- Cohen, A.C. and Whitten, B.J. (1988). **Parameter Estimation in Reliability and Life Span Models**. New York: Marcel Dekker.
- Evans, M., Hastings, N., and Peacock, B. (2000). **Statistical Distributions**. New York: John Wiley & Sons.
- Krishnamoorthy, K. (2006). Handbook of Statistical Distributions with Applications. **Florida: Chapman & Hall.**