

การเรียนรู้วิธีการสอนของนักศึกษาครุคณิตศาสตร์ในการพัฒนาการคิดทางเรขาคณิต ของนักเรียนในชั้นเรียนที่ใช้การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด

เจนสมุทร แสงพันธ์¹ และอัญชลี ตานานนท์²

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษากระบวนการเรียนรู้วิธีการสอนของนักศึกษาครุคณิตศาสตร์ในการพัฒนาการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนในชั้นเรียนที่ใช้วัตรกรรมการพัฒนาวิชาชีพครูด้วยการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด ชั้นเรียนกรณีศึกษาที่ใช้เป็นหน่วยในการวิเคราะห์ประกอบด้วยครูในทีมการศึกษาชั้นเรียนและนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ในโรงเรียนที่ใช้วัตรกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิดในจังหวัดเชียงใหม่ ผู้วิจัยเก็บรวบรวมข้อมูลในวงจรการศึกษาชั้นเรียน ตลอดทั้งการสอนในหน่วยการเรียนรู้ของชั้นเรียนกรณีศึกษาด้วยการวิเคราะห์แผนจัดการเรียนรู้ การบันทึกวีดิทัศน์และภาพนิ่งของชั้นเรียนและภาพผลงานนักเรียน ผู้วิจัยวิเคราะห์ชั้นเรียนด้วยการวิเคราะห์ว่าทกรรมผ่านโปรโตคอล ร่วมกับวิเคราะห์วีดิทัศน์ ผลการวิจัยพบว่า การพัฒนาวิชาชีพครูด้วยการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด ทำให้นักศึกษาครูเกิดการพัฒนากระบวนการทางปัญญาในการพัฒนาการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนผ่านการสร้างและทำความเข้าใจ เกี่ยวกับความรู้เชิงบูรณาการด้านเนื้อหาเฉพาะทางเรขาคณิต ความรู้ด้านเนื้อหาและการสอนและความรู้ด้านเนื้อหาและผู้เรียนในเชิงการคิดทางเรขาคณิต และกระบวนการสังคมผ่านชุมชนการเรียนรู้เชิงวิชาชีพในวงจรการศึกษาชั้นเรียนที่ได้เข้าไปเกี่ยวข้องในการปฏิบัติการสอนต่าง ๆ ทั้งการวิเคราะห์หนังสือเรียน การค้นหาสาระการเรียนรู้ การออกแบบสถานการณ์ปัญหา การกำหนดลำดับขั้นการสอน การอำนวยความสะดวกการสอนในชั้นเรียน การสังเกตชั้นเรียน การประเมินผลการเรียนรู้ และการสะท้อนผลชั้นเรียน ซึ่งส่งผลให้เกิดการพัฒนาการคิดทางเรขาคณิต ของนักเรียนทั้งในด้านการให้เหตุผล การสร้างและการนิยามทางเรขาคณิต ได้ดีขึ้นอย่างเป็นลำดับ

คำสำคัญ : 1. การคิดทางเรขาคณิต 2. การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด 3. การพัฒนาวิชาชีพครู
4. การเรียนรู้วิธีการสอน

¹ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ อีเมล : jensamut.s@cmu.ac.th
โทร : 08 7301 6373

² อาจารย์ ดร. ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ โทร : 05 394 4272

Mathematics preservice teachers' learning of how to teach to develop students' geometric thinking in classroom using lesson study and open approach

Jensamut Saengpun³ and Anchalee Tananone⁴

Abstract

The purpose of this study was to investigate how preservice teachers learn to teach in order to develop geometrical thinking through the professional development innovated by lesson study and open approach. The target group was students and a lesson study team of a fourth-grade classroom in Chiang Mai which is innovated by lesson study and open approach. Research data were collected through the cycle of lesson study and analyzed along with lesson plans, classroom video-taped recordings, classroom scenarios and photographs of student's written work. Discourse analysis through protocols with video analysis was used to analyze the data from interviewing and classroom teaching protocols. The results revealed that teacher professional development innovated by lesson study and open approach helps preservice teachers to be able to develop the process for learning how to teach to develop students' geometrical thinking in cognitive processes through integrating specific content knowledge, knowledge of content and teaching, and knowledge of content and student as a way of thinking. It also helps them develop students' geometrical thinking in socialization processes through lesson study as a professional learning community. The process of learning how to teach emerged among the community while engaging in each activity in lesson study, including studying mathematics textbooks, seeking for learning content, designing tasks, lesson planning, facilitating classroom discourses, classroom teaching, classroom observing, assessment and post-teaching reflection. These processes help students to develop geometrical thinking in aspects of reasoning, construction and visualization continually.

Keywords: 1. Geometric thinking 2. Lesson study and open approach
3. Teacher professional development 4. Learning how to teach

³ Assistant Professor, Ph.D., Mathematics Education Program, Faculty of Education, Chiang Mai University, Chiang Mai, Thailand.
Email address: jensamut.s@cmu.ac.th Tel: 08 7301 6373

⁴ Lecturer, Ph.D., Mathematics Education Program, Faculty of Education, Chiang Mai University, Chiang Mai, Thailand.
Tel: 05 394 4272

บทนำ

เมื่อพิจารณาถึงชั้นเรียนคณิตศาสตร์โดยเฉพาะการสอนเรื่องเรขาคณิตในระดับโรงเรียน เรขาคณิตเป็นสาระหนึ่งของหลักสูตรคณิตศาสตร์ที่ไม่ว่าหลักสูตรของประเทศใดก็ตามต่างก็ให้ความสำคัญกับเรขาคณิตในหลักสูตรคณิตศาสตร์เป็นอย่างมาก แต่อย่างไรก็ตาม นักเรียนก็ไม่อาจจะแสดงความรู้ความเข้าใจเชิงความคิดรวบยอดได้ดีนักในเนื้อหาเรขาคณิต Senk (1989 cited in Mistretta, 2000: 2) ได้รายงานว่านักเรียนในระดับมัธยมศึกษาเป็นจำนวนมากในอเมริกาไม่ได้เตรียมไว้เพื่อชั้นเรียนเรขาคณิตเลย จากการวิจัยของ Fuys, Geddes & Tishler (1988, cited in Mistretta, 2000: 2) พบว่าในชั้นเรียนเรขาคณิตเต็มไปด้วยการเน้นการใช้สัญลักษณ์ที่เป็นทางการ (formal symbolism) และการตั้งชื่อ/ใช้ชื่อ (naming) ในหลักสูตรคณิตศาสตร์ ในขณะที่ความเข้าใจและการคิดทางเรขาคณิตกลับถูกลดให้มีความสำคัญลงไป Carroll (1998, cited in Mistretta, 2000: 2) พบว่านักเรียนทั้งในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นและตอนปลายมักจะขาดการมีประสบการณ์ในการให้เหตุผลเกี่ยวกับแนวคิดทางเรขาคณิต สอดคล้องกับ Inprasitha (2003, cited in Srichompoo, 1006: 1) ที่กล่าวว่า “แม้ว่าเรขาคณิตจะมีความสำคัญ... แต่การจัดการเรียนการสอนเรขาคณิตในโรงเรียนยังเน้นให้นักเรียนท่องจำเนื้อหาและสร้างรูปเรขาคณิตตามขั้นตอนหรือคำสั่ง ซึ่งวิธีการเหล่านี้ไม่ได้ส่งเสริมให้นักเรียนได้มีประสบการณ์เกี่ยวกับการคิดทางเรขาคณิตที่เกี่ยวกับการคิด วิเคราะห์ พิสูจน์ ให้เหตุผล และความสัมพันธ์ของมิติต่าง ๆ ซึ่งมีผลกระทบต่อการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในระดับที่สูงขึ้น” ซึ่งในการศึกษาเชิงเปรียบเทียบในปัจจุบัน เกี่ยวกับหลักสูตรคณิตศาสตร์พบว่า หลาย ๆ ประเทศเริ่มหันมาให้ความสำคัญกับการคิดทางเรขาคณิตมากขึ้น อย่างเช่นประเทศฝรั่งเศส และญี่ปุ่น ดังที่ในรายงานเกี่ยวกับผลการสอบเนื้อหาเรขาคณิตจาก TIMSS (Broeck, Opdenakker, Hermans & Damme, 2003) ที่ให้ความสำคัญไปที่การวิจัยเกี่ยวกับการเรียนรู้ทางเรขาคณิตให้มีการศึกษาระดับลึกเกี่ยวกับความเข้าใจ ทางเรขาคณิตของนักเรียนให้มากขึ้น ทั้งแง่ของความหมายและความเข้าใจเกี่ยวกับเรขาคณิต การสร้างความรู้ทางเรขาคณิต และการพัฒนาของการคิดทางเรขาคณิต (geometric thinking development) จากสภาพปัญหาดังกล่าวข้างต้นสะท้อนให้เห็นถึงว่า หากไม่มีการปรับเปลี่ยนวัฒนธรรมชั้นเรียนคณิตศาสตร์ ในมิติที่เกี่ยวข้องกับการส่งเสริมกิจกรรมการเรียนรู้ให้เกิดขึ้นอย่างแท้จริงในนักเรียนแล้ว การเรียนการสอนเรขาคณิต หรือแม้กระทั่งเนื้อหาอื่น ๆ จะยังคงประสบปัญหาในระบบโรงเรียนดังกล่าวในระยะยาว ในแง่ที่นักเรียนจะยังเผชิญปัญหาในการเรียนคณิตศาสตร์ในระดับที่สูงขึ้นอีก ฉะนั้นการพัฒนาการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียน จึงเป็นเรื่องที่ควรให้ความสำคัญกับการเปลี่ยนวัฒนธรรมในชั้นเรียนคณิตศาสตร์แบบเดิมโดยการเปลี่ยนบทบาทครูที่ยึดหนังสือเรียนเป็นหลักและจัดลำดับการสอนในชั้นเรียนตามหนังสือเรียนและพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์สำหรับการสอนสำหรับครูที่ครอบคลุมถึงความรู้ด้านเนื้อหาเฉพาะ และความรู้ในด้านการสอน (Ball, Thames, Bass, Sleep, Lewis & Phelps, 2009) หากครูมีความรู้ในลักษณะดังกล่าวจะทำให้เกิดผลต่อการปรับเปลี่ยนกระบวนการเรียนรู้ และการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนด้วยเช่นกัน

ในปัจจุบัน ชุมชนวิจัยด้านคณิตศาสตร์ศึกษาทั่วโลกต่างให้ความสนใจมายังแนวคิดเกี่ยวกับกระบวนการเรียนรู้วิธีการสอนคณิตศาสตร์ของครูผ่านมุมมอง “ความรู้ทางคณิตศาสตร์สำหรับการสอน (Mathematical knowledge for teaching) ที่มีผลต่อกระบวนการเรียนรู้และการคิดของนักเรียนมากขึ้น Ball et al. (2009) ได้อธิบายว่าความรู้ดังกล่าวสะท้อนออกมาเพื่อตอบคำถามที่ว่า “อะไรคือสิ่งที่ครูกระทำในการสอนคณิตศาสตร์ และมีแนวทางใดที่ครูจะทำให้เกิดการบรรลุในเรื่องการให้เหตุผล ความเข้าใจ และทักษะทางคณิตศาสตร์”

ในคำอธิบายดังกล่าวแสดงให้เห็นความเข้าใจขั้นต้น วิธีการปฏิบัติ และความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นต่อ

การสอน แตกต่างจากวิธีการปฏิบัติของนักคณิตศาสตร์ และแตกต่างจากความรู้ที่สอนกันในระดับมหาวิทยาลัย

Ball et al. (2009) ได้ให้ความหมายของความรู้ทางคณิตศาสตร์สำหรับการสอนไว้ว่า “เป็นความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ถูกนำไปใช้ในงานของการสอนคณิตศาสตร์ ครอบคลุมการอธิบายคำศัพท์ และความคิดรวบยอด การตีความข้อความ หรือวิธีการแก้ปัญหาของนักเรียน การใช้การสังเกตแทนที่เกิดขึ้นจริงในชั้นเรียน โดยความรู้ทางคณิตศาสตร์ของครูจะมีผลต่อการบรรลุเป้าหมายของนักเรียน ทั้งในด้านความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ และการคิดทางคณิตศาสตร์”

การพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์สำหรับการสอนดังที่ได้กล่าวไปนั้นถือว่าเป็นการเรียนรู้วิธีการสอนของครูจากชั้นเรียนของตนเอง ซึ่งถือเป็นแนวทางการพัฒนาวิชาชีพครูที่อยู่ในชั้นเรียนเป็นฐาน และในปัจจุบันการพัฒนามาตรฐานวิชาชีพครูของญี่ปุ่นที่เรียกว่า “การศึกษาระดับชั้นเรียน” (lesson study) เป็นนวัตกรรมที่ได้รับการพัฒนาและใช้ในประเทศญี่ปุ่นมาตั้งแต่เมื่อประมาณ 140 ปีที่แล้ว ปัจจุบันได้รับการเผยแพร่ไปหลายประเทศทั่วโลกเพื่อใช้ในการพัฒนามาตรฐานวิชาชีพครู สำหรับประเทศไทยนั้น ได้เริ่มมีการใช้การศึกษาระดับชั้นเรียนมาตั้งแต่ปี พ.ศ. 2545 โดยศูนย์วิจัยคณิตศาสตร์ศึกษา มหาวิทยาลัยขอนแก่น จนในปี พ.ศ. 2552 ศูนย์วิจัยคณิตศาสตร์ศึกษาได้ดำเนินการจัดทำ “โครงการพัฒนามาตรฐานวิชาชีพครูคณิตศาสตร์ด้วยนวัตกรรมการศึกษาระดับชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด” ที่จัดขึ้นร่วมกับศูนย์วิจัยคณิตศาสตร์ศึกษา และได้รับการสนับสนุนของสำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา ในโครงการดังกล่าว ศูนย์วิจัยคณิตศาสตร์ศึกษา (Inprasitha, 2010) ได้ปรับการศึกษาระดับชั้นเรียน ของประเทศญี่ปุ่น (Japanese lesson study) มาใช้ โดยการศึกษาระดับชั้นเรียนที่ปรับมาใช้ในบริบทของประเทศไทย ประกอบด้วย 3 ขั้นตอน ได้แก่ 1) การสร้างแผนการจัดการเรียนรู้ร่วมกันของทีมการศึกษาระดับชั้นเรียน (collaboratively design research lessons [plan]) 2) การสอนในชั้นเรียนและการสังเกตการสอนร่วมกัน ของทีมการศึกษาระดับชั้นเรียน (collaboratively observing the research lessons [do]) และ 3) การสะท้อนผลหรือการอภิปรายร่วมกันของทีมการศึกษาระดับชั้นเรียน (collaboratively reflection or post-discussion [see]) ทั้งนี้ Inprasitha (2010) ได้บูรณาการเอาวิธีการแบบเปิดในฐานที่เป็นแนวทางการสอน (open approach as a teaching approach) เข้าไปในกระบวนการการศึกษาระดับชั้นเรียน เพื่อให้ครูที่ทำงานร่วมกันในการศึกษาระดับชั้นเรียนนั้นออกแบบหน่วยการเรียนรู้ และแผนจัดการเรียนรู้ ซึ่งวิธีการแบบเปิดนี้มีขั้นตอนการสอนอยู่ 4 ขั้นตอน ดังนี้คือ 1) การนำเสนอปัญหา ปลายเปิด 2) การเรียนรู้ด้วยตนเองของนักเรียนผ่านการแก้ปัญหา ในขณะที่ครูบันทึกแนวคิด ของนักเรียนเพื่อใช้ในการอภิปราย 3) การอภิปรายทั้งชั้นและการเปรียบเทียบ และ 4) การสรุปโดยการเชื่อมโยงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เกิดขึ้นในชั้นเรียน อีกทั้ง Sudejamnong, Robsok, Loipha & Inprasitha (2004) กล่าวว่า การพัฒนามาตรฐานวิชาชีพครูโดยใช้การศึกษาระดับชั้นเรียนที่นำเอาวิธีการแบบเปิด ซึ่งเป็นแนวทางการสอนมาใช้ในการฝึกประสบการณ์วิชาชีพครูของนักศึกษาเป็นตำแหน่งที่สำคัญในการทำให้ความรู้ด้านเนื้อหา และความรู้ ด้านการสอนถูกบูรณาการ และให้ความสำคัญไปยังกระบวนการคิดของนักเรียนโดยเฉพาะอย่างยิ่งในด้านการคิดทางเรขาคณิต

จากการที่ผู้วิจัยมีประสบการณ์ในการฝึกนักศึกษาฝึกประสบการณ์วิชาชีพครูในโรงเรียนที่ใช้แนวทางการศึกษาระดับชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด ผู้วิจัยพบว่า การสอนในเนื้อหาเกี่ยวกับเรขาคณิต ผู้สอนทั้งครูประจำการ และนักศึกษาฝึกประสบการณ์วิชาชีพครูมักจะประสบปัญหาในหลายด้าน อาทิ ความไม่เข้าใจในเนื้อหาเรขาคณิตที่ปรากฏในหนังสือเรียน โดยเฉพาะอย่างยิ่งวิธีการสอนเรขาคณิตที่ทำให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหาได้ด้วยตนเอง ความเชื่อมโยงเนื้อหาเรขาคณิตจากขั้นก่อนหน้า จึงทำให้ไม่สามารถเข้าไปช่วยเหลือนักเรียนให้เกิดพัฒนาการคิดทางเรขาคณิต ดังจะเห็นได้จากการที่นักเรียนไม่สามารถให้เหตุผลทางเรขาคณิต

การแสดงแทน และการใช้ภาษาเพื่อสื่อความหมายในการพิสูจน์และให้เหตุผลทางเรขาคณิตได้ชัดเจน ครูส่วนใหญ่ต่างให้ความเห็นว่าการสอนเรขาคณิตเป็นเรื่องที่ยาก เพราะไม่ใช่เพียงแต่สอนเพื่อสร้างความคิดรวบยอดแล้วนักเรียนจะเข้าใจได้ แต่ยังต้องทำให้นักเรียนแสดงการคิดทางเรขาคณิตด้วย ซึ่งครูส่วนใหญ่ขาดความเข้าใจเรื่องดังกล่าวอย่างมาก

จากที่มาและปัญหาข้างต้น ทำให้ผู้วิจัยเกิดความตระหนักเป็นอย่างยิ่งว่า การพัฒนาระดับการคิดทางเรขาคณิต เป็นเรื่องที่มีความสำคัญอย่างมากต่อการเรียนรู้เรขาคณิต การที่ครูมีความรู้ทางคณิตศาสตร์สำหรับการสอนโดยเฉพาะอย่างการสอนเรขาคณิตในลักษณะบูรณาการทั้งความรู้เนื้อหาเฉพาะ และความรู้ด้านการสอนจะช่วยให้เกิดมุมมองใหม่ในการช่วยเหลือนักเรียน ในด้านการส่งเสริมการคิดทางเรขาคณิตเป้าหมายของการวิจัยนี้ต้องการศึกษากระบวนการเรียนรู้วิธีการสอนของนักศึกษาฝึกประสบการณ์วิชาชีพครูในการพัฒนาการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนผ่านกระบวนการพัฒนานักวิชาชีพครูด้วยนวัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด การวิจัยนี้จะทำให้เห็นแง่มุมเชิงทฤษฎีและการประยุกต์สู่การพัฒนาการคิดทางเรขาคณิตในชั้นเรียนที่มีความเป็นรูปธรรมมากขึ้น

วัตถุประสงค์การวิจัย

เพื่อศึกษากระบวนการเรียนรู้วิธีการสอนของนักศึกษาฝึกประสบการณ์วิชาชีพครูในการพัฒนาการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนผ่านกระบวนการพัฒนานักวิชาชีพครู ด้วยนวัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด

การทบทวนวรรณกรรม

การทบทวนวรรณกรรมที่เกี่ยวข้องสำหรับงานวิจัยนี้ศึกษาจากแนวคิดเกี่ยวกับความรู้ทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการสอน (mathematical knowledge for teaching) การคิดทางเรขาคณิต (geometric thinking) และการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิดมีรายละเอียด ดังนี้

ความรู้ทางคณิตศาสตร์สำหรับการสอน

ในการวิจัยครั้งนี้อาศัยกรอบแนวคิดเชิงทฤษฎีที่เรียกว่า “Practice-based Theory of Mathematical Knowledge for Teaching” หรือทฤษฎีของความรู้ทางคณิตศาสตร์สำหรับการสอนที่มีฐานจากภาคปฏิบัติของ Ball et al. (2009) ผู้วิจัยใช้กรอบแนวคิดดังกล่าวเพื่อประยุกต์ใช้ในการสำรวจ และวิเคราะห์ความรู้ทางคณิตศาสตร์สำหรับการสอนของนักศึกษาฝึกประสบการณ์วิชาชีพครูคณิตศาสตร์ ในโรงเรียนที่ใช้นวัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด Ball et al. (2009) ได้ให้ความหมายของคำว่าความรู้ทางคณิตศาสตร์ สำหรับการสอน (Mathematical Knowledge for Teaching: MKT) ว่าหมายถึง ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นต้องใช้ในการปฏิบัติเกี่ยวกับการสอนคณิตศาสตร์ Ball et al. (2009) ได้ให้ความหมายของการสอน ว่าหมายถึงทุกสิ่งทุกอย่างที่ครูกระทำ เพื่อสนับสนุนส่งเสริมการเรียนรู้ของนักเรียน ในความหมายนี้จะเห็นได้อย่างชัดเจนว่าเกี่ยวพันอยู่กับงานที่มีปฏิสัมพันธ์ในการสอนในชั้นเรียน รวมถึงงานต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นในการสอนนั้นด้วย ทั้งนี้ ยังครอบคลุมไปถึงการวางแผนจัดการเรียนรู้ การประเมินชิ้นงานของนักเรียน การอธิบายถึงความก้าวหน้าของนักเรียนต่อผู้ปกครอง หรือผู้บริหารโรงเรียน ในกรอบแนวคิดเชิงทฤษฎีที่ใช้ในการวิเคราะห์นี้ แบ่งออกเป็นสองส่วนใหญ่ ๆ คือ ความรู้ที่เป็นเนื้อหาสาระ (subject matter knowledge) และเป็นความรู้ด้านเนื้อหาที่บูรณาการกับการสอน

(pedagogical content knowledge) ส่วนด้านซ้ายของแผนภาพจะแสดงถึงการรู้ ทางคณิตศาสตร์ในการสอนที่เป็นคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ และทางด้านขวามือของแผนภาพจะเป็นการผสมผสานของการรู้เกี่ยวกับเด็กหรือวิธีการรู้ของการสอน ในบริบทเนื้อหาหรือหัวข้อคณิตศาสตร์ที่มีความรู้เฉพาะเจาะจง ความรู้ทางด้านเนื้อหาทั่วไป (Common Content Knowledge: CCK) หมายถึง ความรู้เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ที่จำเป็นโดยทั่วไปกับผู้อื่นที่รู้และใช้คณิตศาสตร์ ซึ่งตรงนี้เป็นส่วนที่แตกต่างออกไปจากความรู้ด้านเนื้อหา ที่มีความเฉพาะ (Specialized Content Knowledge: SCK) ซึ่งเป็นรูปแบบของการรู้คณิตศาสตร์ ที่คนที่ไม่ได้สอนคณิตศาสตร์จะจำเป็นต้องรู้ ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ในระดับแนวราบเป็นความเข้าใจกว้าง ๆ เกี่ยวกับแนวคิดทางคณิตศาสตร์กับแนวคิดที่มีความเฉพาะที่เชื่อมโยงกัน คำสำคัญที่อยู่ในภาพด้านขวาได้แก่ ความรู้เกี่ยวกับเนื้อหาและนักเรียน (Knowledge of Content and Students: KCS) ความรู้เกี่ยวกับเนื้อหาและการสอน (Knowledge of Content and Teaching: KCT) และความรู้เกี่ยวกับหลักสูตร (knowledge of curriculum) ซึ่งถือว่าเป็นส่วนที่ผสมผสานกันเป็นพิเศษ และผูกติดอย่างลึกซึ้งในงานของการสอนการคิดทางเรขาคณิต

Raymond Duval นักจิตวิทยาชาวฝรั่งเศส เป็นผู้ที่ศึกษาเรขาคณิตจากมุมมองเชิงการรู้และการรับรู้ Duval (1998: 38-39, cited in John, 1998: 31-33) ได้นำเสนอแนวคิดเกี่ยวกับการคิดทางเรขาคณิตว่าประกอบด้วยกระบวนการต่าง ๆ เชิงการรู้ 3 กระบวนการ ซึ่งเติมเต็มหน้าที่เฉพาะเจาะจงในเชิงญาณวิทยาในการศึกษาการให้เหตุผลทางเรขาคณิตกระบวนการเชิงการรู้นี้ประกอบด้วย

1. กระบวนการเกี่ยวกับการนึกภาพ (visualization processes) เป็นกระบวนการที่นักเรียนนึกภาพเกี่ยวกับข้อความทางเรขาคณิต อาจจะแสดงแทนออกมาให้เห็นเพื่อแทนข้อความทางเรขาคณิตด้วยการเขียนการร่างรูป หรือการสำรวจเพื่อพยายามหาวิธีการแก้สถานการณ์ปัญหาทางเรขาคณิตที่มีความซับซ้อน ในความหมายของการนึกภาพนี้ สอดคล้องกับที่ Zimmermann & Cunningham (1991: 3) และ Herschowitz, et al. (1989: 75 cited in Abraham Arcavi, 2003: 216) ว่า “การนึกภาพ (visualization) เป็นความสามารถอย่างหนึ่ง ที่ถือว่าเป็นทั้งกระบวนการและผลลัพธ์ของการสร้าง (product of creation) การตีความ (interpretation) การใช้ (using) และการสะท้อน (reflection) เหนือภาพ (pictures) รูป (images) ใดอะแกรม (diagrams) ในใจของเราเอง และบนกระดาษ หรือเครื่องมือทางเทคโนโลยีต่าง ๆ โดยมีเป้าหมายในการแสดงถ้อยคำ หรือภาพและการสื่อสารถึงข้อมูลอะไรบางอย่าง ทั้งนี้ ก็ถือว่าเป็นความสามารถในการคิดและการพัฒนาแนวคิดที่เราไม่รู้จักมาก่อนและทำให้เกิดความเข้าใจขั้นสูงต่อไป”

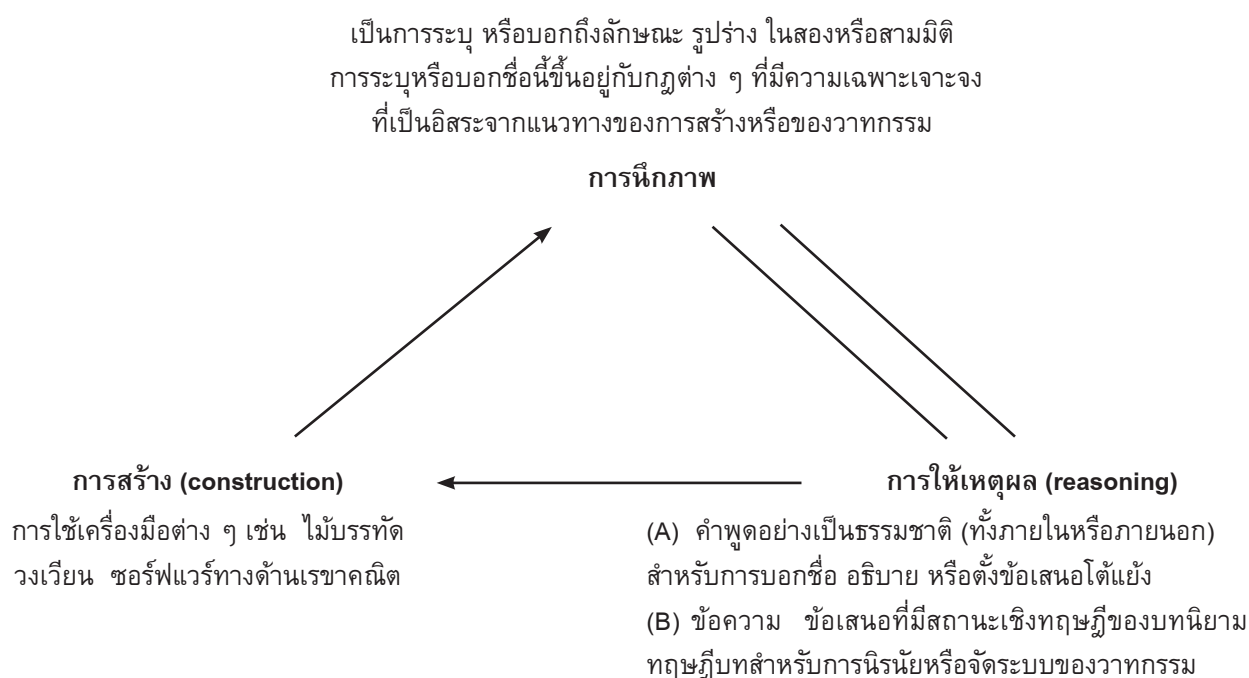
2. กระบวนการเกี่ยวกับการสร้าง (construction processes) กระบวนการนี้เกี่ยวข้องกับการใช้เครื่องมือต่าง ๆ

3. กระบวนการเกี่ยวกับการให้เหตุผล (reasoning processes) เป็นกระบวนการอย่างอ้อม ๆ สำหรับการขยายของความรู้ การอธิบาย และการพิสูจน์

Duval เสนอแนะว่า กระบวนการที่แตกต่างกันเหล่านี้สามารถที่จะแสดงออกมาโดยไม่จำเป็นต้องขึ้นตรงต่อกัน ยกตัวอย่างเช่น การนึกภาพก็ไม่จำเป็นว่าขึ้นอยู่กับการสร้าง ในทำนองเดียวกันถ้าหากการสร้างจะนำไปสู่การนึกภาพก็ตาม กระบวนการสร้างก็ขึ้นอยู่กับเพียงแต่กับการเชื่อมโยงระหว่างสมบัติต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ที่มีความเกี่ยวข้องกันและข้อจำกัดของเครื่องมือที่ใช้อยู่ ในทำนองเดียวกันแม้ว่าการนึกภาพสามารถช่วยในการให้เหตุผลผ่านการช่วยหาข้อค้นพบการพิสูจน์ ในบางกรณีการนึกภาพอาจจะไปในทางผิดได้เช่นกัน อย่างไรก็ตาม Duval ได้เสนอว่า “กระบวนการเชิงการรู้ทั้ง 3 นี้ถูกเชื่อมเข้าด้วยกันอย่างใกล้ชิด และการรวมกันอย่างนี้ก็เป็น

สิ่งจำเป็นอย่างมากในเชิงการรู้สำหรับทักษะ ความสามารถในการเรขาคณิต “ (Duval, 1998: 38, cited in John, 1998: 32) Duval ได้แสดงความเชื่อมโยงระหว่างกระบวนการเชิงการรู้ทั้งสามนี้ในภาพที่ 1

ในภาพที่ 1 นี้ ลูกศรแต่ละอันแสดงถึงวิธีการหรือแนวทางที่กระบวนการเชิงการรู้อันหนึ่งไปมีผลต่อการส่งเสริมกระบวนการเชิงการรู้ที่อื่นในกิจกรรมทางเรขาคณิต อย่างที่ได้กล่าวก่อนหน้านี้ Duval ทำลูกศรอันที่สองให้เป็นลายจุดไว้เพราะว่าการนึกภาพไม่ได้ช่วยเรื่องการให้เหตุผลเสมอไป ลูกศร 5A และ 5B แสดงถึงการให้เหตุผลสามารถพัฒนาในแนวทางที่เป็นอิสระจากกระบวนการสร้างหรือกระบวนการนึกภาพ ดังแสดงในภาพที่ 1



ภาพที่ 1 กระบวนการนึกภาพ

ข้อเสนอของ Duval ที่ว่า การรวมกันของกระบวนการเชิงการรู้เหล่านี้เป็นสิ่งที่มีความจำเป็นในเชิงการรู้อย่างมาก สำหรับทักษะ ความสามารถทางเรขาคณิต ดังที่ Duval ได้ระบุแยกแยะไว้ว่า จะทำอย่างไรให้เด็กในโรงเรียนได้เห็นถึงการสื่อสารกันระหว่างกระบวนการทั้งสามนี้ Duval เสนอว่า ในความพยายามที่จะเข้าใจถึงพัฒนาการของการคิดทางเรขาคณิต งานวิจัยของเขาได้แสดงผลไว้ดังต่อไปนี้ว่า

1. ทั้งสามกระบวนการนี้จะต้องพัฒนาโดยแยกออกจากกัน
2. การทำกระบวนการนึกภาพที่แตกต่างกัน และระหว่างกระบวนการการให้เหตุผลที่แตกต่างกันเป็นสิ่งที่จำเป็นในหลักสูตร
3. ความผสมผสานร่วมกันของกระบวนการเชิงการรู้ทั้งสามอย่างนี้จะสามารถเกิดขึ้นจริงได้หลังจากความผสมผสานกันบนความแตกต่างหลากหลาย

การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด

ในการใช้การศึกษาชั้นเรียนมาเป็นนวัตกรรมสำหรับการพัฒนาวิชาชีพครูคณิตศาสตร์ของแต่ละประเทศ มีความแตกต่างกัน สิ่งที่เป็นเอกลักษณ์ของการนำเอาการศึกษาชั้นเรียนมาใช้ในประเทศไทยคือ การบูรณาการเอาวิธีการแบบเปิดในฐานะที่เป็นแนวทางการสอนเข้าไปในกระบวนการของการศึกษาชั้นเรียน (Inprasitha, 2010) ในการนี้ผู้วิจัยได้นำเสนอการทบทวนแนวคิดและหลักการของนวัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิดดังรายละเอียดต่อไปนี้

ปัจจุบันการพัฒนาวิชาชีพครูของญี่ปุ่นที่เรียกว่า “การศึกษาชั้นเรียน” (lesson study) เป็นนวัตกรรมที่ได้รับการพัฒนา และใช้ในประเทศญี่ปุ่นมาตั้งแต่เมื่อประมาณ 140 ปีที่แล้ว ปัจจุบันได้รับการเผยแพร่ไปหลายประเทศทั่วโลกเพื่อใช้ในการพัฒนาวิชาชีพครู เหตุผลของการใช้อย่างแพร่หลายและยั่งยืนในประเทศญี่ปุ่นที่ถือเป็นต้นกำเนิดของ Lesson study ก็คือการที่การศึกษาชั้นเรียนทำให้ครูญี่ปุ่นมีโอกาสที่จะทำในสิ่งต่อไปนี้เป็น สร้างแนวคิดทางการศึกษาภายในงานภาคปฏิบัติของตนเอง เปลี่ยนมุมมองต่าง ๆ ของตนเองเกี่ยวกับการเรียน การสอนผ่านมุมมองของผู้เรียน และมีความสุขไปกับการช่วยเหลือร่วมกันระหว่างเพื่อนครู (Takahashi, 2006) Fernandez & Yoshida (2004) ได้กล่าวถึง ลักษณะสำคัญประการหนึ่งของการศึกษาชั้นเรียนคือ การที่ครูร่วมกัน ศึกษาเอกสารในเชิงการสอนต่าง ๆ ได้แก่ หลักสูตร แผนการจัดการเรียนรู้ และทำการออกแบบแผนการจัดการเรียนรู้ที่จะใช้ในชั้นเรียนจริงร่วมกัน ซึ่งดูคุณภาพได้จากการสังเกตชั้นเรียนจริง และอภิปรายร่วมกับเพื่อนครูว่า แผนนั้นมีผลต่อความเข้าใจของนักเรียนอย่างไร วิธีการทำงานของครูดังกล่าวส่งผลต่อการวิจัยรูปแบบการสอนในประเทศญี่ปุ่นที่เปลี่ยนจากการสอนแบบบอกไปสู่การสอนเพื่อความเข้าใจ

สำหรับประเทศไทยนั้น ได้เริ่มมีการใช้การศึกษาชั้นเรียนมาตั้งแต่ปี พ.ศ. 2545 โดยศูนย์วิจัยคณิตศาสตร์ศึกษา มหาวิทยาลัยขอนแก่น จนในปี พ.ศ. 2552 ศูนย์วิจัยคณิตศาสตร์ศึกษา ได้ดำเนินการจัดทำ “โครงการพัฒนา วิชาชีพครูคณิตศาสตร์ด้วยนวัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด” ที่จัดขึ้นร่วมกับศูนย์วิจัย คณิตศาสตร์ศึกษา และได้รับการสนับสนุนของสำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา ในโครงการดังกล่าว ศูนย์วิจัยคณิตศาสตร์ศึกษา (Inprasitha, 2010) ได้ปรับการศึกษาชั้นเรียนของประเทศ ญี่ปุ่น (Japanese lesson study) มาใช้โดยการศึกษาชั้นเรียนที่ปรับมาใช้ในบริบทของประเทศไทยประกอบด้วย 3 ขั้นตอน ได้แก่ 1) การสร้าง แผนการจัดการเรียนรู้ร่วมกันของทีมการศึกษาชั้นเรียน (collaboratively design research lessons [plan]) 2) การสอนในชั้นเรียนและการสังเกตการสอนร่วมกันของทีมการศึกษาชั้นเรียน (collaboratively observing the research lessons [do]) และ 3) การสะท้อนผลหรือการอภิปรายร่วมกันของทีมการศึกษาชั้นเรียน (collaboratively reflection or post-discussion [see]) ทั้งนี้ Inprasitha (2010) ได้บูรณาการเอาวิธีการแบบเปิดในฐานะที่เป็นแนวทางการสอน (open approach as a teaching approach) เข้าไปใน กระบวนการการศึกษาชั้นเรียน เพื่อให้ครูที่ทำงานร่วมกันในการศึกษาชั้นเรียนนั้นออกแบบหน่วยการเรียนรู้ และแผนจัดการเรียนรู้ ซึ่งวิธีการแบบเปิดนี้มีขั้นตอนการสอนอยู่ 4 ขั้นตอน ดังนี้คือ 1) การนำเสนอปัญหาปลายเปิด 2) การเรียนรู้ ด้วยตนเองของนักเรียนผ่านการแก้ปัญหาในขณะที่ครูบันทึกแนวคิดของนักเรียนเพื่อใช้ในการอภิปราย 3) การอภิปราย ทั้งชั้นและการเปรียบเทียบ และ 4) การสรุปโดยการเชื่อมโยงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนที่เกิดขึ้นใน ชั้นเรียน

ระเบียบวิธีวิจัย

การศึกษาครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงคุณภาพผู้วิจัยใช้ระเบียบวิธีวิจัยการทดลองเชิงการสอน (teaching experiment) (Cobb, 2003) ในการศึกษาเป็นรายกรณี (case study approach) ใช้การสังเกตแบบมีส่วนร่วมในการทำงานร่วมกับทีมการศึกษาชั้นเรียนในการทำงานตามวงจรของการศึกษาชั้นเรียน มีรายละเอียดดังนี้

กลุ่มเป้าหมาย

ในงานวิจัยนี้กลุ่มเป้าหมาย ได้แก่ ทีมการศึกษาชั้นเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนบ้านแม่สา จังหวัดเชียงใหม่ พ.ศ. 2558 โรงเรียนดังกล่าวเป็นโรงเรียนที่ใช้หลักสูตรการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิดในการพัฒนาวิชาชีพครู ทีมการศึกษาชั้นเรียนดังกล่าว ประกอบด้วย ครูผู้สอนซึ่งเป็นนักศึกษาฝึกประสบการณ์วิชาชีพครู สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ครูผู้สังเกต 3 คน ได้แก่ ครูประจำชั้น และนักศึกษาฝึกประสบการณ์วิชาชีพครู และนักวิจัย

การเก็บรวบรวมข้อมูลและการวิเคราะห์ข้อมูล

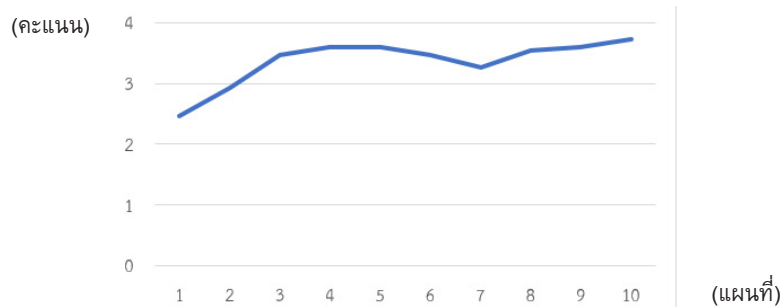
ผู้วิจัยเก็บรวบรวมข้อมูลตลอดกระบวนการศึกษาชั้นเรียนในชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ที่สอนเรื่องสามเหลี่ยมจำนวน 10 แผนด้วยการวิเคราะห์แผนการจัดการเรียนรู้ การใช้แบบบันทึกวิธีการปฏิบัติในการสอนแบบประเมินการสร้างแผนจัดการเรียนรู้ การบันทึกกวีทัศน์ชั้นเรียน การบันทึกภาพนิ่งชั้นเรียน ผลงานนักเรียน และการสัมภาษณ์ ผู้วิจัยวิเคราะห์ชั้นเรียน ด้วยการวิเคราะห์โพทอคอลร่วมกับวิเคราะห์กวีทัศน์ โดยแสดงให้เห็นถึงกระบวนการเรียนรู้ในการสอนเพื่อพัฒนาการคิดทางเรขาคณิตตามกรอบแนวคิดของ Duval (1998) ในบริบทของการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด ข้อมูลวิจัยถูกนำเสนอด้วยการพรรณนาวิเคราะห์ตามกระบวนการของการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด

ผลการวิจัย

ผู้วิจัยได้นำเสนอผลการวิจัยเพื่อแสดงถึงกระบวนการเรียนรู้ในการสอนเพื่อพัฒนาการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนในชั้นเรียนที่ใช้หลักสูตรการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด กรณีศึกษานักศึกษาฝึกประสบการณ์วิชาชีพครูชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ในการสอนเรื่องสามเหลี่ยม ดังกระบวนการของการศึกษาชั้นเรียน ดังนี้

1. กระบวนการเรียนรู้วิธีการสอนของนักศึกษาฝึกประสบการณ์วิชาชีพครูในการพัฒนาการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนผ่านกระบวนการพัฒนาวิชาชีพครูด้วยหลักสูตรการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด : วิเคราะห์จากแผนการจัดการเรียนรู้ที่เป็นผลจากระยะของการสร้างแผนจัดการเรียนรู้ร่วมกัน (plan) ในกระบวนการ ศึกษาชั้นเรียน

ผู้วิจัยได้นำเอาแผนการจัดเรียนรู้ของนักศึกษาฝึกประสบการณ์วิชาชีพครูที่สอนในหน่วยการเรียนรู้เรื่อง สามเหลี่ยมชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 10 แผน มาวิเคราะห์กระบวนการเรียนรู้วิธีการสอนผ่านแบบประเมินความรู้และวิธีการปฏิบัติสำหรับการสอนในการพัฒนาการคิดทางเรขาคณิตที่ผู้วิจัยพัฒนาขึ้นมา ซึ่งประกอบด้วย 3 ด้าน คือ การค้นหาสาระการเรียนรู้ของบทเรียน (seeking subject matters) การออกแบบสถานการณ์ปัญหา (task) และการอำนวยความสะดวกในชั้นเรียน (facilitating classroom discourse) และนำมาแสดงด้วยกราฟที่แสดงถึงคุณภาพและพัฒนาการของวิธีการปฏิบัติในเชิงการสอนที่สะท้อนถึงกระบวนการและผลของการเรียนรู้เชิงการสอน โดยพิจารณาเกณฑ์รูปรีดจากการมีองค์ประกอบด้านต่าง ๆ ของ PCK โดยเรียงคะแนนจาก 0 - ไม่ปรากฏ จนถึง 4 - มีและปรากฏชัดเจน ดังแสดงผลในภาพที่ 2



ภาพที่ 2 แสดงระดับคะแนนในการพัฒนาการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนตามแผนการจัดการเรียนรู้

จากภาพที่จะเห็นว่า ตั้งแต่แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 ถึง 10 นักศึกษามีพัฒนาของกระบวนการเรียนรู้วิธีการสอนในการพัฒนาการคิดทางเรขาคณิตดีขึ้นโดยลำดับ และเมื่อวิเคราะห์ในรายละเอียด จะเห็นว่า ในแผนจัดการเรียนรู้ที่ 1 และ 2 นักศึกษาไม่ค่อยปรากฏถึงความรู้ทางคณิตศาสตร์สำหรับการสอนมากนัก โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ความรู้ด้านเนื้อหาเฉพาะทาง (SCK) และความรู้ด้านการสอนและวิธีคิดของนักเรียน เนื่องจาก นักศึกษายังไม่สามารถวิเคราะห์สาระการเรียนรู้ของบทเรียนจากวิธีคิดของนักเรียน ซึ่งเป็นช่วงแรก ๆ ของหน่วยการเรียนรู้ แต่เมื่อผ่านแผนจัดการเรียนรู้ตั้งแต่แผนที่ 3 ไปแล้ว นักศึกษาได้เรียนรู้ถึงวิธีการคิดของนักเรียนได้แล้ว จึงสามารถกำหนดเนื้อหาสาระ และออกแบบสถานการณ์ปัญหา และอำนวยความสะดวกในชั้นเรียนที่สอดคล้องและส่งเสริมตำแหน่งของการพัฒนาการคิดทางเรขาคณิตทั้งด้านการให้เหตุผล การสร้างและการนึกภาพทางเรขาคณิต

2. กระบวนการเรียนรู้วิธีการสอนของนักศึกษาฝึกประสบการณ์วิชาชีพครูในการพัฒนาการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนผ่านกระบวนการพัฒนาวิชาชีพครูด้วยนวัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด : วิเคราะห์จากชั้นเรียนซึ่งเป็นผลในระยะของการการสอนและการสังเกตชั้นเรียนร่วมกัน (Do) ในกระบวนการศึกษาชั้นเรียน

กรณีศึกษาชั้นเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4

สถานการณ์ปัญหา

จากที่นักเรียนจัดกลุ่มรูปสามเหลี่ยมในคาบที่แล้ว ให้นักเรียนสังเกตรูปสามเหลี่ยมและช่วยกันจัดกลุ่มรูปสามเหลี่ยมตามวิธีการของครูและวิธีการของนักเรียนที่กำหนดให้ นักเรียนจะสามารถช่วยครูจัดกลุ่มรูปสามเหลี่ยมได้หรือไม่

1) ชี้นำเสนอสถานการณ์ปัญหา

ครูทักทายนักเรียนและทบทวน ส่วนประกอบของรูปสามเหลี่ยม (รูปสามเหลี่ยม คือรูปที่มีด้านสามด้าน และมีมุมสามมุม) และทบทวนการจัดกลุ่มของนักเรียนในคาบที่แล้ว ว่ามีวิธีการจัดกลุ่มอย่างไรบ้าง (สี, ขนาดรูปสามเหลี่ยม, ลักษณะการแขวน) โดยเน้นที่แบ่งออกเป็นสามกลุ่มคือ สีเหมือนกัน 2 ด้าน สีเหมือนกันทั้ง 3 ด้าน และสีไม่เหมือนกันทั้ง 3 ด้าน ว่าหากจัดกลุ่มตามสีของหลอดกาแฟ นักเรียนสังเกตเห็นความสัมพันธ์อะไรบ้าง ในการจัดกลุ่มของรูปสามเหลี่ยมด้วยวิธีการของครู จะจัดกลุ่มของรูปสามเหลี่ยมตามลักษณะของการแขวน แล้วนักเรียนจะได้สังเกตลักษณะการแขวนของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งรูปสามเหลี่ยมที่นำมาแขวนจะสามารถแบ่งได้ 3 ลักษณะ คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีฐานอยู่ในแนวนอน, รูปสามเหลี่ยมที่ด้านใดด้านหนึ่งสามารถ

วางอยู่ในแนวนอนเสมอ และรูปสามเหลี่ยมที่เอียงเสมอไม่ว่าจะปักหมุดที่มุมใด

จากนั้นครูจึงนำเสนอสถานการณ์ปัญหา ดังนี้

จากที่นักเรียนจัดกลุ่มรูปสามเหลี่ยมในคาบที่แล้ว ให้นักเรียนสังเกตรูปสามเหลี่ยมและช่วยกันจัดกลุ่มรูปสามเหลี่ยมตามวิธีการของครูและวิธีการของนักเรียนที่กำหนดให้ นักเรียนจะสามารถช่วยครูจัดกลุ่มรูปสามเหลี่ยมได้หรือไม่

ครูติดคำชี้แจงของกิจกรรมบนกระดานแล้วให้นักเรียนอ่านตาม

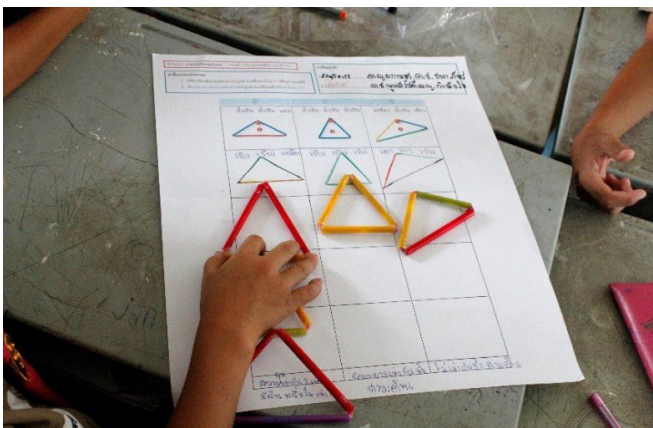
คำชี้แจงของกิจกรรม

1. ให้นักเรียนสังเกตและจัดกลุ่มรูปสามเหลี่ยมลงในตารางที่ครูกำหนดให้
2. พิจารณาความยาวแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมแล้วเขียนลงในตาราง

จากนั้นครูแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่ม ๆ ละ 6 คน โดยให้นักเรียนช่วยกันสังเกตและจัดกลุ่มรูปสามเหลี่ยมลงในตารางที่ครูกำหนดให้ และพิจารณาความยาวแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมแล้วเขียนลงในตาราง โดยครูแนะนำนักเรียนว่าควรปรึกษากันก่อนที่จะเขียนลงในใบงาน ใบงานจะได้สะอาดเรียบร้อย ครูคาดการณ์ปัญหาที่อาจจะเกิดขึ้นไว้ล่วงหน้าว่า นักเรียนไม่สามารถจัดกลุ่มตามลักษณะการแขวนรูปสามเหลี่ยม ตามวิธีของครูได้ เนื่องจากมองรูปไม่ออก ซึ่งครูจะได้แนะนำให้นักเรียนวางรูปสามเหลี่ยมในแนวเดียวกัน เพื่อที่จะสามารถพิจารณารูปสามเหลี่ยมได้

2) ขั้นการเรียนรู้ด้วยตนเองจากการแก้ปัญหา

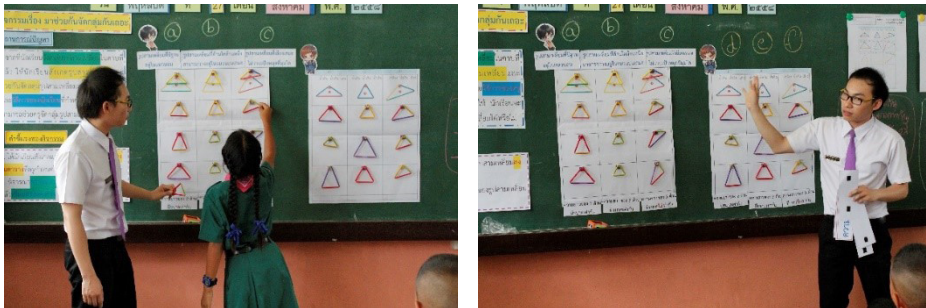
หลังจากที่ในคาบที่ผ่านมา นักเรียนได้สร้างรูปสามเหลี่ยมขึ้นมา ในวันนี้นักเรียนจะได้จัดกลุ่มสามเหลี่ยมซึ่งจะนำไปสู่การเห็นคุณสมบัติ และการเรียกชื่อสามเหลี่ยมต่าง ๆ ที่เป็นทางการมากขึ้นในคาบต่อไป เช่นคำว่ารูปสามเหลี่ยมด้านเท่า รูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จากการวิเคราะห์การแก้ปัญหาในทางเรขาคณิตในเรื่องดังกล่าวนี้ พบว่า นักเรียนสังเกตรูปสามเหลี่ยมที่ครูกำหนดให้ จากนั้นจึงจัดกลุ่มรูปสามเหลี่ยมที่ครูกำหนดให้ลงในตารางทั้งสองแบบคือ วิธีการของนักเรียน และวิธีการของครู โดยพิจารณาจากลักษณะการแขวนรูปสามเหลี่ยม การใช้สี และความยาวด้าน ดังภาพที่ 3



ภาพที่ 3 แสดงการแก้ปัญหาของนักเรียน
(ที่มา : Jensamut Saengpun)

3) การเปรียบเทียบและการอภิปรายร่วมกันทั้งชั้นเรียน

ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มนำเสนอผลงานโดยมีการวางแผนการจัดลำดับแนวคิดของนักเรียนว่าจะนำเสนอ กลุ่มของนักเรียนกลุ่มใดก่อนหลังโดยพิจารณาจากการจัดกลุ่มรูปสามเหลี่ยมและความยาวในแต่ละด้านที่นักเรียนสรุปไว้ท้ายตารางดังนี้คือ ลำดับที่ 1 นำเสนอกลุ่มที่ผิดหรือเขียนคำอธิบายไม่ค่อยชัดเจน ว่าทำไมถึงคิด แบบนั้น แล้วให้กลุ่มอื่นซักถามหรือพิจารณาว่าเห็นด้วยหรือไม่ อย่างไร โดยครูไม่บอกว่าผิดแต่ให้นักเรียนช่วยกัน อภิปรายว่าผิดอย่างไรลำดับที่ 2 นำเสนอกลุ่มที่มีแนวคิดที่คล้ายกันเป็นส่วนใหญ่ หากเป็นแนวคิดที่ใกล้เคียงกับข้อสรุป ลำดับที่ 3 นำเสนอกลุ่มที่มีแนวคิดแตกต่างเพิ่มเติมจากกลุ่มที่ได้นำเสนอไปแล้ว และ ลำดับที่ 4 นำเสนอกลุ่มที่อธิบายแนวคิดใกล้เคียงกับข้อสรุปมากที่สุดเพื่อเชื่อมโยงเข้าสู่ข้อสรุป เมื่อนักเรียนในกลุ่มที่ 1 นำเสนอผลงานแล้ว ครูเลือกผลงานที่มีเนื้อหาเพิ่มเติมจากกลุ่มแรกมานำเสนอโดยไม่ได้อธิบายว่าแนวคิดของกลุ่มใดผิด เพียงแต่บอกว่ายังไม่สมบูรณ์เท่าไรนัก น่าจะใช้วิธีการที่ชัดเจนขึ้นกว่าเดิม จากนั้นให้กลุ่มอื่นนำเสนอ การจัดกลุ่มรูปสามเหลี่ยมที่ครูกำหนดให้ ความยาวในแต่ละด้านที่นักเรียนสรุปไว้ท้ายตาราง และความสัมพันธ์ระหว่างตารางวิธีการของครูและวิธีการของนักเรียน ดังภาพที่ 4



ภาพที่ 4 แสดงการอภิปรายและเปรียบเทียบแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของครูและนักเรียน
(ที่มา : Jensamut Saengpun)

ในขั้นการอภิปรายและเปรียบเทียบแนวคิดร่วมกันทั้งชั้นเรียนนี้เองที่ครูได้อำนวยความสะดวกชั้นเรียนที่ทำให้เกิดการพัฒนาคิดทางเรขาคณิตอย่างเห็นได้ชัดจนกล่าวคือ การที่ครูพยายามขยายแนวคิดของนักเรียนโดยการสื่อเสียงความคิด ให้นักเรียนออกมานำเสนอผลงานและบอกเหตุผล ทำให้นักเรียนพิจารณาการใช้ภาษา ใช้ประโยคที่นำเสนอถึงคุณสมบัติของรูปสามเหลี่ยม เช่น รูปกลุ่มนี้เป็นรูปที่มีด้านเท่ากันทุกด้าน หรือรูปกลุ่มนี้ เป็นรูปที่ไม่มีด้านเท่ากันเลย หรือรูปกลุ่มนี้ มีด้านเท่ากันเพียงสองด้าน การสื่อสารในลักษณะเช่นนี้ทำให้นักเรียนพยายามแสดงเหตุผลด้วยการนึกภาพ และใช้สื่อด้วยภาพหรือหลอดสามเหลี่ยมในการอธิบายการสร้าง หรือการจัดกลุ่มสามเหลี่ยมของตนเอง ครูพยายามถามนักเรียนด้วยคำถามปลายเปิด เช่น รู้ได้อย่างไรว่ารูปเหล่านี้จัดอยู่ในกลุ่มเดียวกัน ทำให้เกิดความพยายามเสนอแนวคิดของตนเอง โดยพยายามเลือกใช้คำที่มีความเป็นทางการมากขึ้นในการอธิบายเหตุผลของตนเอง

4) ขั้นสรุปบทเรียน

ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปเกี่ยวกับความยาวในแต่ละด้านที่นักเรียนสรุปไว้ท้ายตาราง ความสัมพันธ์ระหว่างตารางวิธีการของครูและวิธีการของนักเรียน (วิธีการของครู สามารถจัดกลุ่มได้ตามลักษณะของด้านแต่ละด้าน และวิธีการของนักเรียน สามารถจัดกลุ่มได้ตามสีของหลอดกาแฟ ซึ่งจะได้ความสัมพันธ์ของวิธีการทั้งสองว่า รูปสามเหลี่ยมสามารถจัดกลุ่มได้ตามความยาวของด้านได้ว่าความยาวของ 3 ด้านมีขนาดเท่ากัน ความยาวเท่ากัน 2 ด้าน และความยาวของทุกด้านไม่เท่ากัน)

จากการวิเคราะห์ชั้นเรียนข้างต้น จะเห็นได้ว่า ครูพยายามอำนวยความสะดวกการเรียนรู้โดยมีเป้าหมายเพื่อให้ นักเรียนค้นหาสมบัติของประเภทของรูปสามเหลี่ยมต่าง ๆ ก่อนที่จะมีการระบุชื่อ (naming) ประเภทของสามเหลี่ยมอย่างเป็นทางการในบทเรียนต่อไป บทเรียนนี้จึงเต็มไปด้วยวาทกรรมที่ครูพยายามดึงเอาเสียงของนักเรียนออกมาเพื่อค้นหาลักษณะร่วมของรูปต่าง ๆ ที่จัดออกมาเป็นกลุ่ม ๆ ผ่านการให้เหตุผลด้วยการใช้คำการพรรณนาความถึงคุณสมบัติ และการเห็นแบบแผนของรูปสามเหลี่ยมในแต่ละกลุ่มว่ามีคุณลักษณะร่วมอย่างไร การให้เหตุผลของนักเรียนผลักดันให้นักเรียนพยายามนึกภาพผ่านการใช้สื่อตัวแทนด้วยภาพ ในที่นี้คือหลอดสีที่สร้างขึ้นมาก่อนหน้า และนำไปสู่การตรวจสอบการสร้างด้วยการแขวนรูปสามเหลี่ยม เพื่อแยกแยะว่ารูปสามเหลี่ยมประเภทใด มีลักษณะของการแขวนบนหมุดแตกต่างกันอย่างไร การคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนที่เกิดขึ้นมีความเป็นพลวัตร แต่ละส่วนแม้จะเกิดแยกส่วนกัน แต่ส่งผลต่อกันในเชิงกระบวนการด้วยวาทกรรมชั้นเรียนทั้งการสื่อเสียงความคิดของครูจากการคาดการณ์แนวคิดเหล่านั้นไว้ล่วงหน้า การปรับแนวคิดของนักเรียนผ่านการใช้คำภาษาที่มีความเป็นทางการมากขึ้น การเน้นการสื่อสารเพื่อให้คนในชุมชนในชั้นเรียนเข้าใจถึงเหตุผล และการสร้างของกลุ่มตนเอง และการปรับแต่งข้อโต้แย้งหรือข้อเสนอคำถามต่าง ๆ ของนักเรียนเพื่อให้เกิดเป็นวาทกรรมทางเรขาคณิตที่นักเรียนทุกคนเกิดการยอมรับแนวคิดเหล่านั้น

3. กระบวนการเรียนรู้วิธีการสอนของนักศึกษาฝึกประสบการณ์วิชาชีพครูในการพัฒนาการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนผ่านกระบวนการพัฒนาวิชาชีพครูด้วยนวัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด: วิเคราะห์จากการสะท้อนผลชั้นเรียน (see) ในกระบวนการศึกษาชั้นเรียน

การสะท้อนผลเป็นส่วนหนึ่งของกิจกรรมของการศึกษาชั้นเรียน ซึ่งมีความสำคัญอย่างมากที่ครูทุกคนและนักศึกษาฝึกประสบการณ์วิชาชีพครูจะได้มาร่วมมองกลับไปยังชั้นเรียนของตนเอง ร่วมแลกเปลี่ยนสิ่งที่ตนเองเห็นในการสังเกตชั้นเรียน และร่วมกันพยายามเสนอแนวทางในการปรับปรุงคุณภาพชั้นเรียนของกันและกัน ซึ่งการสะท้อนมีลำดับ คือ ให้ครูผู้สอนเป็นผู้เริ่มสะท้อนก่อน ตามด้วยครูผู้สังเกตทั้งที่เป็นนักศึกษาฝึกประสบการณ์วิชาชีพ และครูประจำชั้น หรือครูพี่เลี้ยง และสะท้อนสรุปด้วยผู้วิจัยในฐานะที่เป็นอาจารย์นิเทศก์และผู้เชี่ยวชาญประจำโครงการ

จากกรณีศึกษาการสะท้อนผลชั้นเรียนที่สอนเรื่องสามเหลี่ยม ในชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนบ้านแม่สา ที่สอนโดยนักศึกษาครูที่เป็นกรณีศึกษาวิจัยพบว่า นักศึกษาที่ทำหน้าที่เป็นครูผู้สอนได้สะท้อนให้เห็นถึงความรู้ด้านเนื้อหาสาระเฉพาะ (SCK) ที่ในแง่ของการนิยามความหมายของสามเหลี่ยมประเภทต่าง ๆ ได้อย่างชัดเจน และมีความเข้าใจความหมายที่เกิดจากการสร้างด้วยเงื่อนไขต่าง ๆ ในขณะเดียวกันเมื่อสะท้อนถึงแนวคิดเกี่ยวกับการแก้ปัญหาของนักเรียนว่านักเรียนสามารถจำแนก จัดกลุ่มสามเหลี่ยมได้จากอะไรบ้าง โดยเฉพาะ ทำให้เห็นว่านักศึกษามีความรู้ด้านเนื้อหาและตัวผู้เรียนในเชิงวิธีคิด (KCS) นักศึกษาได้คาดการณ์แนวคิดของนักเรียนไว้ล่วงหน้า และนำมาสะท้อนกับสิ่งที่ปรากฏในชั้นเรียนซึ่งกับที่เกิดขึ้นทุกอย่าง จึงทำให้สามารถดำเนินการสอนและอภิปรายได้อย่างดีสามารถนำเอาแนวคิดของนักเรียนที่วางแผนไว้มาเชื่อมโยงจนทำให้นักเรียนสามารถเห็นความแตกต่างของสามเหลี่ยมประเภทต่าง ๆ ได้เป็นอย่างดี แสดงให้เห็นถึงการพัฒนาความรู้ด้านเนื้อหาและการสอน (KCT) ทั้งนี้การสะท้อนผลของผู้เข้าร่วม ช่วยทำให้นักศึกษาได้เรียนรู้กลวิธีการสอนต่าง ๆ ที่มีจุดเน้นให้นักเรียนแก้ปัญหาด้วยตนเอง และเชื่อมโยงแนวคิดของนักเรียนชัดเจนมากขึ้นด้วย

อภิปรายผล

จากผลการวิจัยจะเห็นได้ว่า การพัฒนาวิชาชีพครูด้วยนวัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด (lesson study and open approach) (Inprasitha, 2010) ในงานวิจัยนี้ เป็นบริบทของการพัฒนาวิชาชีพครู ที่ทำให้ครูได้ร่วมกันทำงานเพื่อยกระดับคุณภาพชั้นเรียนผ่านกระบวนการทำงานในการศึกษาชั้นเรียน ประกอบด้วย การสร้างแผนการจัดการเรียนรู้ร่วมกัน การสอนและการสังเกตชั้นเรียนร่วมกัน และการสะท้อนผลชั้นเรียนร่วมกัน จากการพัฒนาการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนโดยทีมการศึกษาชั้นเรียนซึ่งประกอบด้วย ครูประจำการ และนักศึกษาฝึกประสบการณ์วิชาชีพครูที่มุ่งเน้นให้เกิดการพัฒนาการคิดทางเรขาคณิต ทำให้ครูได้เข้าใจเนื้อหาเรขาคณิตที่ตนเองสอนมากขึ้น รวมถึงเข้าใจอย่างลึกซึ้งเกี่ยวกับแนวทางการสอนเรขาคณิตที่มุ่งเน้นการให้ความสำคัญไปยังแง่มุมเกี่ยวกับการสร้าง การนิยาม และการให้เหตุผลทางเรขาคณิตมากขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยที่เกี่ยวกับการพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับการสอนและเนื้อหาทางเรขาคณิตที่น่าเอาระบบพัฒนาวิชาชีพครูแบบญี่ปุ่นหรือการศึกษาชั้นเรียนนี้มาใช้ในการพัฒนาการเรียนการสอนเรขาคณิต (Ginsberg et al., 2006; Moss et al., 2006) ว่าเป็นวิธีการที่ทำให้ครูได้พัฒนาความเข้าใจอย่างลึกซึ้งเกี่ยวกับความรู้ด้านเนื้อหา และการสอน รวมถึงการทำให้มีความมั่นใจในวิชาชีพของตนเองที่จะสามารถพัฒนาการคิดทางเรขาคณิตสำหรับนักเรียนได้ดีมากขึ้น ในแง่ของกระบวนการเรียนรู้วิธีการสอนเพื่อพัฒนาการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนจากงานวิจัยที่สะท้อนให้เห็นถึงลักษณะสำคัญของการสอน คือการให้โอกาสนักเรียนได้เรียนรู้ด้วยตนเองจากการแก้ปัญหา นักเรียนสามารถแสดงออกถึงวิธีคิดและนำเสนอวิธีคิดของตนเองได้อย่างอิสระ รวมทั้งส่งเสริมให้เกิดการอภิปรายกลุ่ม และอภิปรายร่วมกันทั้งชั้นเรียน และบทบาทของครูที่ให้ความสำคัญกับการทำความเข้าใจ และศึกษาแนวคิดของนักเรียนและเอื้ออำนวยการคิดทางคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียนผ่านการวางแผนการออกแบบสถานการณ์ปัญหาและการอำนวยความสะดวกในแง่มุมต่าง ๆ เนื่องจาก การสอนด้วยวิธีการแบบเปิด เปิดโอกาสให้ครูได้สร้างชุมชนคณิตศาสตร์ขึ้นมาที่เคารพความแตกต่างทางวัฒนธรรม และความคิดผ่านภาษา ครูได้มีโอกาสนำเสียงนักเรียนและนำแนวคิดของนักเรียนมาใช้ในการอภิปราย เป็นเนื้อหาสาระมากกว่าจะมาจากตัวบทที่มาจากในหนังสือเรียนที่เน้นคำที่เป็นทางการตั้งแต่ต้น และยังสามารถใช้วาทกรรมผ่านคำถามต่าง ๆ ที่ทำให้เกิดการโต้แย้งให้เหตุผลทางเรขาคณิต ในการนำเสนอ แนวคิดต่าง ๆ แล้ว ทำให้นักเรียนได้เรียนรู้เรขาคณิตด้วยภาษาที่เป็นธรรมชาติ หรือด้วยภาษาถิ่นของเขาเองได้อย่างอิสระ จนยอมรับและปรับภาษาผ่านการกระทำ และการสร้างจนสามารถเข้าใจและใช้ภาษาเรขาคณิตที่เป็นทางการในการแสดงความคิดเห็นในชั้นเรียนได้ ผลการวิจัยนี้สอดคล้องกับแนวคิดของ Battista (2007); Inprasitha (2008) ในแง่ที่ว่า การสอนเรขาคณิตด้วยวิธีการแบบเปิดที่ให้นักเรียนได้ลงมือแก้ปัญหาเอง จะทำให้นักเรียนค้นพบเนื้อหาสาระการเรียนรู้ได้ด้วยตนเอง และครูทำหน้าที่เป็นแต่เพียงผู้คอยอำนวยความสะดวก อย่างเหมาะสม ทั้งยังสามารถให้นักเรียนได้พัฒนาความคิดผ่านการใช้ภาษาของเขาด้วย

จากการวิเคราะห์ข้อมูลนี้ยังทำให้เป็นประเด็นเพื่อการอภิปรายเพิ่มในแง่ของเนื้อหาเรขาคณิต เนื่องจากวาทกรรมทางเรขาคณิตที่นักเรียนแสดงออกมาในการแก้ปัญหาในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ไม่ได้มีลักษณะของเรขาคณิตแบบยูคลิดียนต้องอธิบายด้วยนิยาม หรือสัจพจน์ แต่วาทกรรมของนักเรียนเกี่ยวกับเรขาคณิตที่แสดงออกมามักอยู่ในรูปของความสามารถในการแสดงความรู้สึกเชิงปริภูมิ และมาจากการสร้างจึงได้เรียนรู้คำศัพท์ต่าง ๆ ทางเรขาคณิตในภายหลัง งานวิจัยตรงนี้สอดคล้องกับข้อเสนอแนะของ Sinclair & Bruce (2015) ที่ตั้งคำถามถึงเรขาคณิตแบบยูคลิดียน และเสนอว่าในเรขาคณิตในระดับโรงเรียนในอนาคตควรให้ความสำคัญ

กับบทบาทของการให้เหตุผลเชิงปริภูมิ (spatial reasoning) และบทบาทของการวาดภาพในการสร้างความหมายทางเรขาคณิต การขยายจุดเน้นของเรขาคณิตจากที่เคยเน้นไปที่การใช้คำศัพท์ (active-meaning making orientation) ต่อเรขาคณิตให้มากขึ้น เช่น การสร้าง การนึกภาพ การแยก หรือการประกอบ รูปเรขาคณิต เป็นต้น

ข้อเสนอแนะ

ข้อเสนอแนะสำหรับการทำวิจัยในครั้งต่อไป

1. การพัฒนากรอบแนวคิดเชิงทฤษฎีเฉพาะทางที่อธิบายถึงการสอนเพื่อการพัฒนาการคิดทางเรขาคณิตในบริบทของการสอนด้วยวิธีการแบบเปิดนั้น ผู้วิจัยสามารถศึกษาในรายละเอียดที่ผูกติดอยู่กับขั้นตอนการสอนของวิธีการแบบเปิด เนื่องจากในแต่ละขั้นตอนของวิธีการแบบเปิดว่าทฤษฎีที่ใช้ที่เข้าคู่กับกิจกรรมเชิงการเรียนรู้ในการคิดทางเรขาคณิตนั้น กรอบที่ผู้วิจัยพัฒนาขึ้นในงานวิจัยนี้ยังไม่สามารถวิเคราะห์ได้ครอบคลุม

2. การพัฒนาวิชาชีพครูด้วยการศึกษาชั้นเรียน น่าจะเป็นโจทย์วิจัยที่สามารถนำไปต่อยอดได้ว่า การสร้างชุมชนเชิงวิชาชีพครูด้วยการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิดจะช่วยให้เกิดชุมชนวาทกรรมทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนที่สนับสนุนการคิดทางเรขาคณิตหรือการคิดขั้นสูงในเนื้อหาคณิตศาสตร์อื่น ๆ ได้อย่างไร

ข้อเสนอแนะสำหรับการนำผลการวิจัยไปใช้

จากข้อค้นพบของงานวิจัยที่กล่าวถึงความรู้แต่ละประเภทที่เกิดขึ้นในกระบวนการเรียนรู้วิธีการสอนเพื่อพัฒนาการคิดทางเรขาคณิต ทั้งนี้เพื่อจะเป็นประโยชน์กับครู นักวิจัยที่ทำงานในภาคปฏิบัติในการสอนโรงเรียน ผู้วิจัยมีข้อเสนอแนะว่า ผู้ที่จะนำผลการวิจัยไปใช้ ต้องศึกษาถึงกรอบความรู้ทางคณิตศาสตร์สำหรับการสอนของ Ball et al. (2006) อย่างถ่องแท้ เพื่อจะได้เห็นตำแหน่งของการบูรณาการเนื้อหา และการสอนในวิธีการปฏิบัติเชิงการสอนแต่ละอย่างในการสนับสนุนให้เกิดกระบวนการเรียนรู้ และการคิดทางเรขาคณิตอย่างเป็นระบบ ไม่แยกส่วนกัน นอกจากนี้ยังควรให้ความสำคัญกับการออกแบบหน่วยการเรียนรู้จากการวางแผนร่วมกัน โดยใช้การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด เพื่อจะทำให้เห็นวาทกรรมที่เราทำอยู่นั้น เป็นงานส่งเสริมการเรียนรู้เชิงวิชาชีพของครูและส่งเสริมการคิดของนักเรียนไปพร้อม ๆ กันด้วย

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับการสนับสนุนจากคณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่



References

- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the teaching and learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, 52: 215-241.
- Ball, D. L., Thames, M., Bass, H., Sleep, L., Lewis, J., & Phelps, G. (2009). A Practice Based Theory of Mathematical Knowledge for Teaching. In **Proceeding of 33rd Conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education**, edited by Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H., pp. 95-98. Thessaloniki: Aristotle University of Thessaloniki.
- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester (Ed.), **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**, edited by F. Lester., pp. 843-908. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. **Educational Researcher**, 32(1): 9-13.
- Fernandez, C., & Yoshida. (2004). **Lesson study: A Japanese approach to improving mathematics teaching and learning**. Mahwah NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Ginburg, H. P., Cannon, J., & Pappas, S. (2006). Mathematical thinking and learning. In **Blackwell handbook of early childhood development**, edited by K. McCartney and D. Phillips, pp. 208-229. Massachusetts: Blackwell.
- Inprasitha, Mitree. (2008). **A research report titled “model of students” mathematical thinking development by lesson study and open approach** (รายงานการวิจัยเรื่องการพัฒนาความคิดทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนต้นแบบ โดยการศึกษาบทเรียนและวิธีการเปิด). Khon Kaen: Center for Research I Mathematics Education.
- _____. (2010). One feature of adaptive lesson study in Thailand: designing a learning unit (คุณลักษณะหนึ่งของการศึกษาบทเรียนแบบปรับตัวในประเทศไทย: การออกแบบหน่วยการเรียนรู้). **Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia**, 34(1): 47-66.
- Jones, K. (1998). **Theoretical Frameworks for the Learning of Geometrical Reasoning**. [Online]. Retrieved February 2, 2007 from http://eprints.soton.ac.uk/41308/01/Jones_BSRLM_18_1998.pdf
- Mistretta, R. M. (2000). **Enhancing geometric reasoning**. [Online]. Retrieved March 2, 2007 from <http://202.28.92.194/hwwmds/detail.nsp>
- Sudejamnong, A., Robsouk, K., Loipha, S., & Inprasitha, M. (2004). Development of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching by Using the Innovation of Lesson Study and Open Approach. **Sociology Mind**, 4(4): 317-327.
- Srichompoo, Somkuan. (2006). **A study the level of geometrical thinking based on Van Hiele's model** (การศึกษาระดับการคิดทางเรขาคณิตตามโมเดลของแวน ฮีลี). Master's dissertation, Khon Kaen

University, Khon Kaen, Thailand.

Sinclair, N., & Bruce, C. D. (2015). New Opportunities in Geometry Education at the Primary School.

ZDM Mathematics Education, 47: 319-329.

Takahashi, A. (2006). Characteristics of Japanese mathematics lessons. **Tsukuba Journal of educational study in mathematics**, 25: 37-44.

Van den Broeck, A., Opdenakker, M. C., Hermans, D., & Van Damme, J. (2003). Socioeconomic status and student achievement in a multilevel model of Flemish TIMSS-1999 data: The importance of a parent questionnaire. **Studies in Educational Evaluation**, 29: 177-190.

Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). Editor's Introduction: What is mathematical visualization. In **Visualization in Teaching and Learning Mathematics**, edited by W. Zimmermann & S. Cunningham, pp. 1-8. Washington, DC.: Mathematical Association of America.